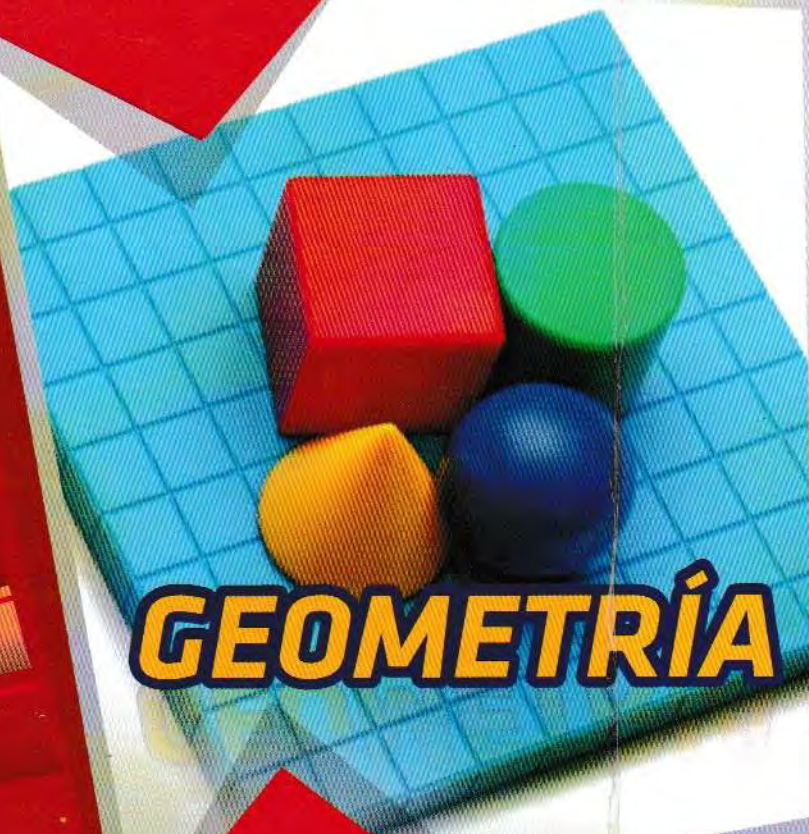


Teoría y Práctica

2

Triángulos



GEOMETRÍA

¡FUI CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Manuel Guevara
Luis Lazo

FONDO EDITORIAL
RODO
Siempre competitivo

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

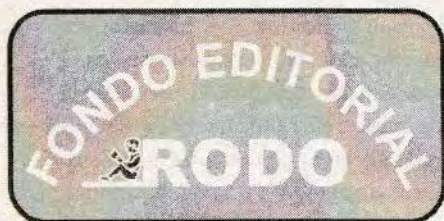
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

TRIÁNGULOS



GEOMETRÍA - TEMA SELECTO 02, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Febrero 2014 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2014-03269

EQUIPO PEDAGÓGICO

Manuel Guevara

Luis Lazo

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

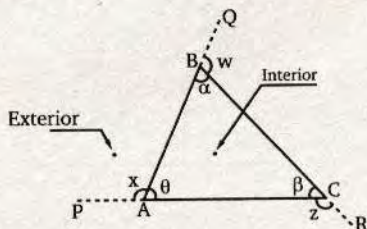
Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

TRIÁNGULO

DEFINICIÓN

Dados los puntos A, B y C no colineales y diferentes; a la reunión de los segmentos AB; BC y AC se le denomina triángulo.



Elementos	Vértices: A, B y C
	Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$
Notación	$\triangle ABC$: Triángulo de vértices A, B y C

ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Ángulo interior:

Se denomina así a los ángulos determinados por los lados del triángulo, en el gráfico anterior los ángulos interiores son: $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$, siendo sus medidas: α , β y θ .

Ángulo exterior:

Se denomina así a los ángulos determinados por la prolongación de un lado y el lado adyacente a dicha prolongación.

En todo triángulo se puede determinar seis ángulos exteriores de los cuales en el gráfico se muestran a tres de ellos (uno por cada vértice): $\angle PAB$, $\angle QBC$ y $\angle RCA$, siendo sus medidas: x , y y z .



NOTA

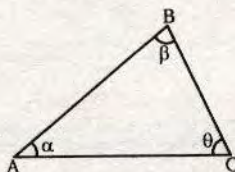
Región triangular. Es la unión del triángulo y su interior.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Teorema 1

En todo triángulo la suma de medidas de los ángulos es igual a 180°

En el gráfico:



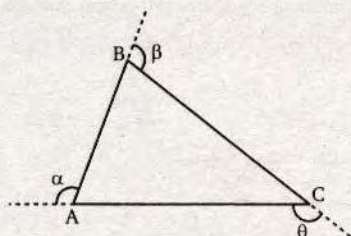
Se cumple:

$$\theta + \alpha + \beta = 180^\circ$$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 02**Teorema 2**

En todo triángulo la suma de medidas de los ángulos exteriores (considerando uno por cada vértice) es igual a 360°

En el gráfico:



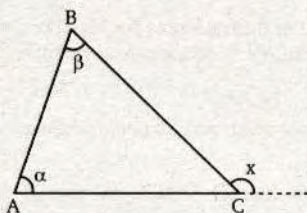
Se cumple:

$$\alpha + \beta + \theta = 360^\circ$$

Teorema 3

En todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos del triángulo no adyacentes a dicho ángulo exterior.

En el gráfico:



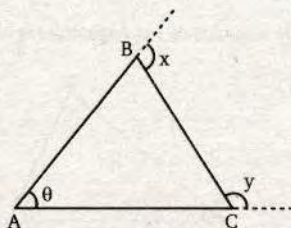
Se cumple:

$$x = \alpha + \beta$$

Teorema 4

En todo triángulo, la suma de las medidas de dos ángulos exteriores es igual a la medida del ángulo interior no adyacente aumentada en 180°

En el gráfico:



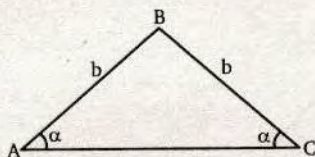
Se cumple:

$$x + y = 180^\circ + \theta$$

Teorema 5

En todo triángulo, la relación de orden entre las medidas de dos ángulos es la misma que entre los lados opuestos correspondientes a dichos ángulos.

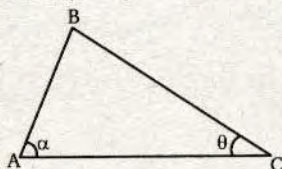
- a) En el gráfico; si $m\angle A = m\angle C = \alpha$



Se cumple:

$$BC = AB$$

- b) En el gráfico si: $m\angle A > m\angle C$ ($\alpha > \theta$)



Se cumple:

$$BC > BA$$

Análogamente si: m

$$\angle A < m\angle C \quad (\alpha < \theta)$$

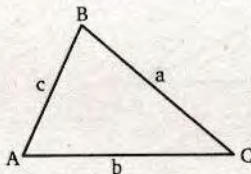
Se cumple:

$$BC < BA$$

Teorema 6

En todo triángulo, la longitud de cualquier lado es menor que la suma de longitudes de los otros dos lados y mayor que la diferencia entre las longitudes de los mismos.

En el gráfico:



Se cumple:

$$b - c < a < b + c$$

Siendo $b \geq c$

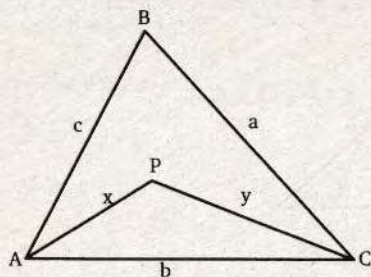


NOTA

A esta última propiedad se le denomina la "desigualdad triangular"

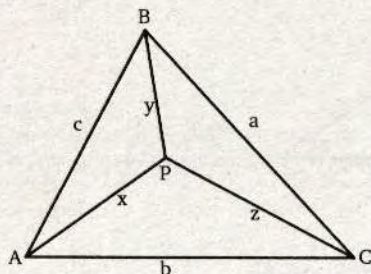
De los dos últimos teorema se desprenden las siguientes propiedades:

1.



$$b < x + y < a + c$$

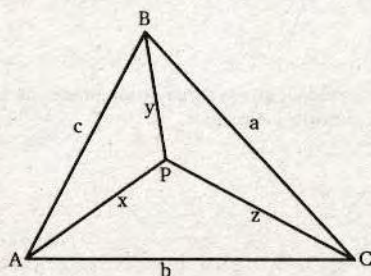
2.



$$p < x + y + z < 2p$$

$2p$: perímetro

3.

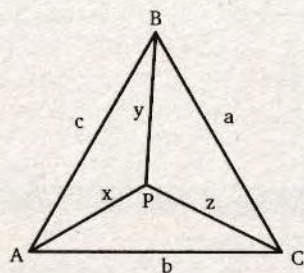


Si: $a > b > c$

$$p < x + y + z < a + b$$

p : semiperímetro

4.



Si ΔABC es equilátero.

Para cualquiera de las tres distancias:

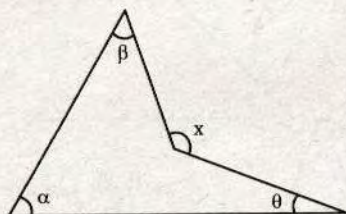
$$y - z < x < y + z$$

siendo: $y \geq z$

PROPIEDADES ADICIONALES

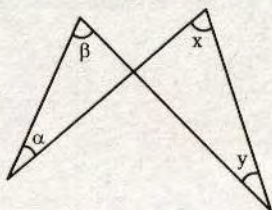
A continuación se muestran algunas figuras que no necesariamente son triángulos pero sin embargo en ellas se cumplen propiedades las cuales derivan de la aplicación de las propiedades del triángulo.

1.



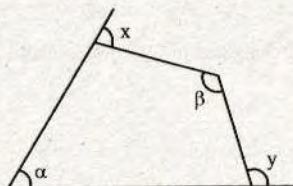
$$x = \alpha + \beta + \theta$$

2.



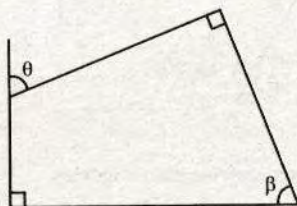
$$\alpha + \beta = x + y$$

3.



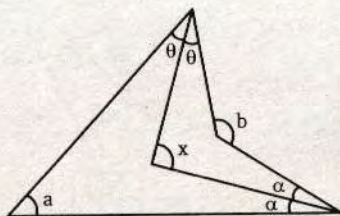
$$\alpha + \beta = x + y$$

4.



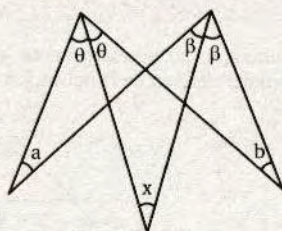
$$\beta = \theta$$

5.



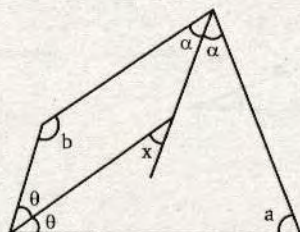
$$x = \frac{a + b}{2}$$

6.



$$x = \frac{a + b}{2}$$

7.



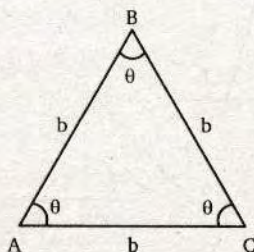
$$x = \frac{b - a}{2}$$

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

De acuerdo a sus lados

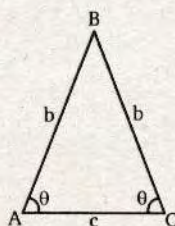
Los triángulos se denominan:

Equilátero. Sus tres lados son de igual longitud.



$$\theta = 60^\circ$$

Isósceles. Dos de sus lados y sólo dos tienen longitudes iguales.



Donde:

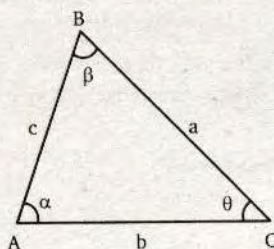
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: laterales

$\overline{AC}$: base

$$b \neq c$$

$$\theta < 90^\circ$$

Escaleno. No tiene lados de igual longitud.



$$a \neq b \quad b \neq c \quad a \neq c$$

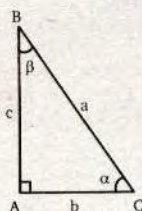
Además:

$$\alpha \neq \beta \quad \beta \neq \theta \quad \theta \neq \alpha$$

De acuerdo a sus ángulos

Los triángulos se denominan:

Triángulo Rectángulo. Uno de sus ángulos es recto.



Donde:

$\overline{BC}$: hipotenusa

$\overline{AB}$; $\overline{AC}$: catetos

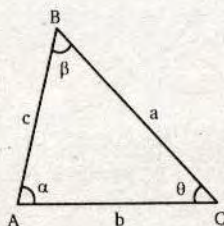
Propiedad :

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Triángulo Oblicuángulo. Ninguno de sus ángulos mide 90° . Estos a su vez se clasifican en:

Acutángulo. Sus ángulos son agudos

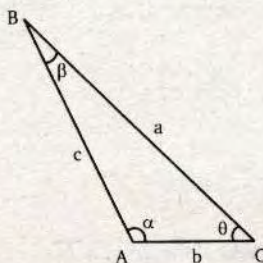


$$\alpha < 90^\circ \quad \beta < 90^\circ \quad \theta < 90^\circ$$

Propiedad:

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Obtusángulo. Uno de sus ángulos es obtuso



$$\alpha > 90^\circ \quad \beta < 90^\circ \quad \theta < 90^\circ$$

Además:

$$BC > AB \quad BC > AC$$

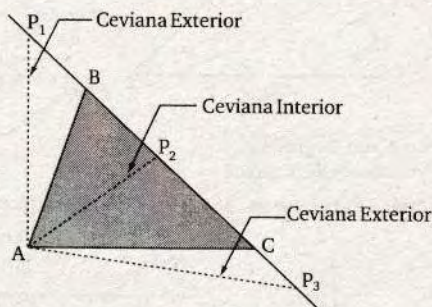
Propiedad:

$$a^2 > b^2 + c^2$$

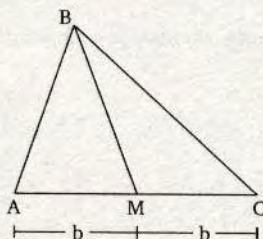
a: longitud del mayor lado.

LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO**CEVIANA**

Dado un triángulo ABC y sea P un punto tal que $P \in \overline{BC} - \{B, C\}$; entonces $\overline{AP}$ se denomina ceviana relativa a BC; está ceviana es interior si $P \in \overline{BC}$ y es exterior si: $P \notin \overline{BC}$.

**LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO****Mediana**

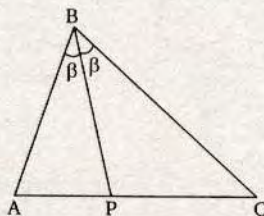
Es la ceviana que biseca al lado al cual es relativa.



$\overline{BM}$: Mediana del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

Bisectriz interior

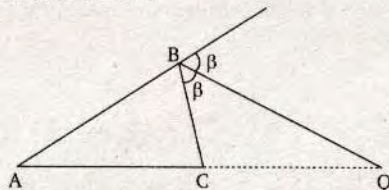
Es la ceviana interior que determina con los lados adyacentes ángulos de igual medida.



$\overline{BP}$: Bisectriz interior del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

Bisectriz exterior

Es la ceviana exterior que determina con el lado adyacente menor y con la prolongación del otro lado adyacente ángulos de igual medida.

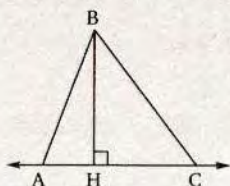


$\overline{BQ}$: Bisectriz exterior del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

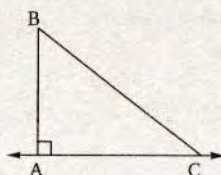
Siendo: $AB > BC$

Altura

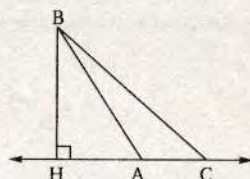
Es la perpendicular trazada desde el vértice hacia la recta que contiene al lado opuesto.



$\overline{BH}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$



$\overline{BA}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

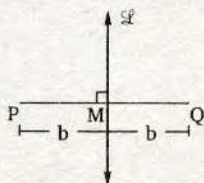


$\overline{BH}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$



NOTA

Mediatriz de un segmento: Recta que biseca perpendicularmente a un segmento

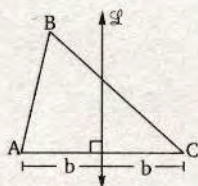


Si: $PM = MQ$ y
 $l \perp PQ$

Entonces:
 l : Mediatriz de $\overline{PQ}$

Mediatriz

Es la recta coplanar al triángulo que biseca perpendicularmente a un lado del triángulo



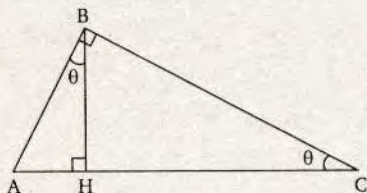
l : Mediatriz del triángulo relativa a $\overline{AC}$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 02

ÁNGULOS DETERMINADOS POR LÍNEAS NOTABLES

Teorema 1

En todo triángulo rectángulo, el ángulo entre la altura relativa a la hipotenusa y uno de los catetos mide igual que el ángulo opuesto a dicho cateto.



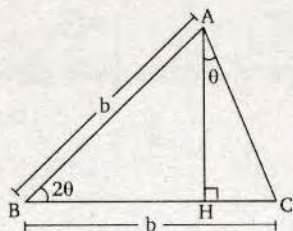
Donde: $\overline{BH}$: altura relativa a la hipotenusa

$$m\angle ABH = m\angle BCH$$

Teorema 2

En todo triángulo isósceles, el ángulo determinado por los laterales mide el doble del ángulo entre la base y la altura relativa a uno de los laterales.

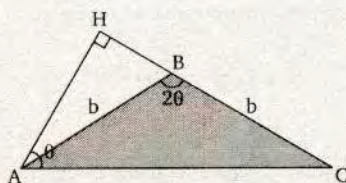
a)



Donde: $\overline{AH}$: altura relativa a $\overline{BC}$
($\overline{AB} \wedge \overline{AC}$: laterales)

$$m\angle ABC = 2(m\angle CAH)$$

b)

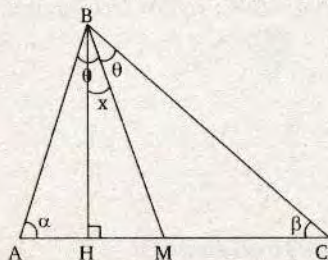


Donde: $\overline{AH}$: altura relativa a $\overline{BC}$
($\overline{AB} \wedge \overline{AC}$: laterales)

$$m\angle ABC = 2(m\angle CAH)$$

Teorema 3

En todo triángulo; el ángulo entre la altura y la bisectriz trazada del mismo vértice mide igual que la semidiferencia de las medidas de los ángulos del triángulo en los otros vértices.



Donde:

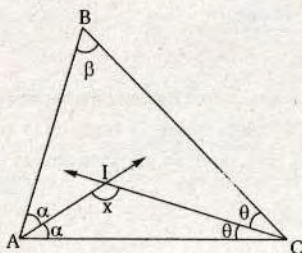
$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

$\overline{BM}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ÁNGULOS FORMADOS POR BISECTRICES DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

a)



Si:

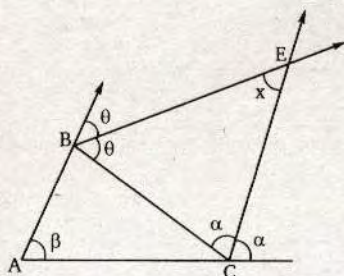
$\overline{AI}$: bisectriz del ángulo A

$\overline{CI}$: bisectriz del ángulo B

Entonces:

$$x = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$$

b)



Si:

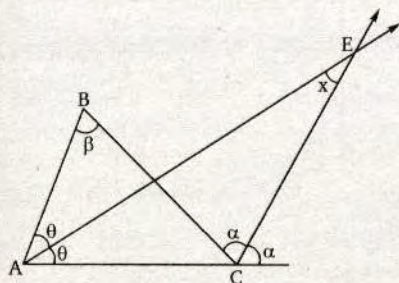
$\overline{BE}$: bisectriz del ángulo exterior en B

$\overline{CE}$: bisectriz del ángulo exterior en C

Entonces:

$$x = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

c)



Si:

$\overline{AE}$: bisectriz del ángulo A

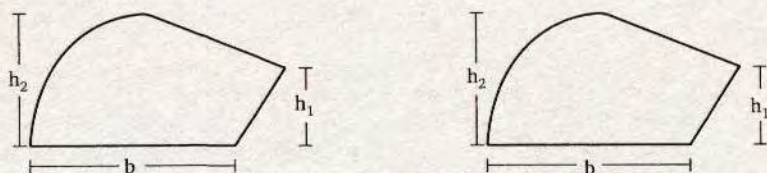
$\overline{CE}$: bisectriz del ángulo exterior en C

Entonces:

$$x = \frac{\beta}{2}$$

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS**FIGURAS CONGRUENTES**

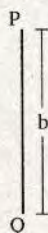
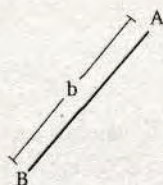
De manera general se denomina así a las figuras que tienen exactamente la misma forma y tamaño, es decir si una de dos figuras congruentes se coloca sobre la otra; estas coincidirían exactamente; se debe entender que este movimiento se efectúa en forma abstracta es decir en la mente. En el gráfico se muestran dos figuras congruentes.



El símbolo $\cong$ significa "es congruente a" y escribiremos $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ para expresar que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{PQ}$.

Segmentos congruentes

Se denomina así a dos o más segmentos que tienen la misma longitud.



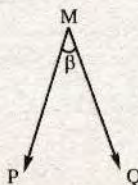
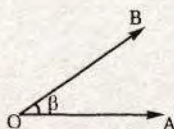
Si: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

Entonces:

$AB = PQ$

Ángulos congruentes

Se denomina así a dos o más ángulos que tienen la misma medida



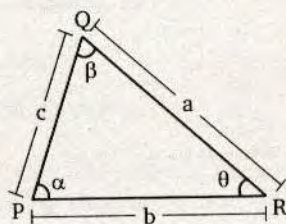
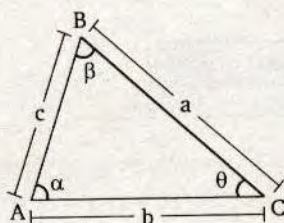
Si: $\angle AOB = \angle PMQ$

Entonces:

$$m\angle AOB = m\angle PMQ$$

Triángulos congruentes

Se denomina así a dos o más triángulos donde para cada lado y cada ángulo de uno de ellos hay un lado y un ángulo; respectivamente congruentes en los demás. En el gráfico se muestran a dos triángulos congruentes.



Si: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Entonces:

$$m\angle A = m\angle P$$

$$m\angle B = m\angle Q$$

$$m\angle C = m\angle R$$

y

$$AB = PQ$$

$$BC = QR$$

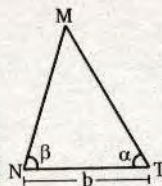
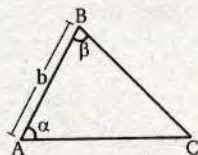
$$AC = PR$$

FORMAS DE RECONOCER A DOS TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Existen formas de reconocer a dos triángulos congruentes mediante condiciones mínimas que dichos triángulos deben cumplir; a continuación se presentan tres casos.

Ángulo - lado - ángulo (A - L - A)

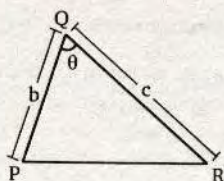
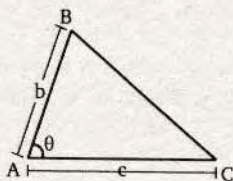
Postulado: Dados los triángulos ABC y MNT tal que $AB = NT$; $m\angle A = m\angle T$ y $m\angle B = m\angle N$; entonces dichos triángulos son congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle TNM$$

Lado - ángulo - lado (L - A - L)

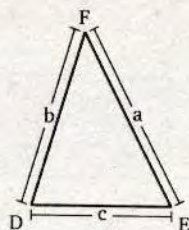
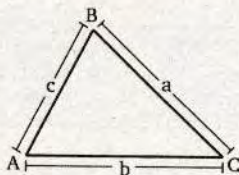
Teorema: Dados los triángulos ABC y PQR tal que $m \angle A = m \angle Q$; $AB = QP$ y $AC = QR$; entonces dichos triángulos son congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle QPR$$

Lado - lado - lado (L - L - L)

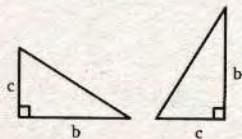
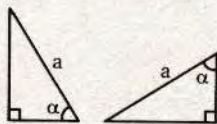
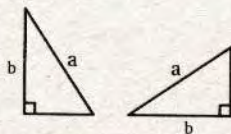
Teorema: Dado los triángulos ABC y DEF tal que $AB = ED$; $BC = EF$ y $AC = FD$ entonces dichos triángulos son congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

NOTA

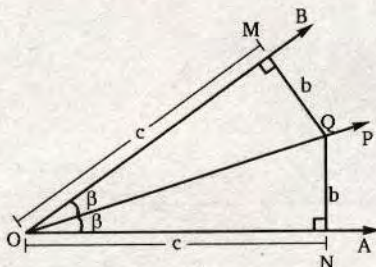
A continuación se muestran algunas parejas de triángulos rectángulos congruentes, son los que suelen presentarse en los problemas (analicelas)

CASO I**CASO II****CASO III**

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo se encuentra a igual distancia de los lados del ángulo.



$\overrightarrow{OP}$: Bisectriz del $\angle AOB$

Entonces:

$$QN = QM$$

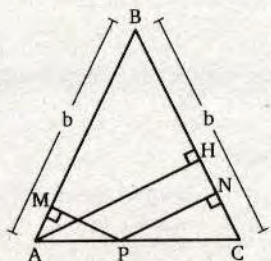
$$OM = ON$$



NOTA

Teorema: En todo triángulo isósceles, la suma de las distancias de un punto de la base hacia los laterales es igual a la longitud de la altura relativa a un lateral.

a)



Si: $AB = BC$

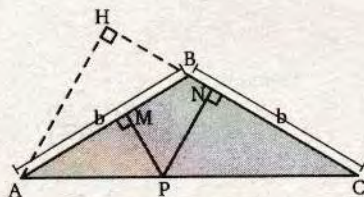
$\overline{AC}$: base

P : punto de la base

Entonces :

$$AH = PM + PN$$

b)



Si: $AB = BC$

$\overline{AC}$: base

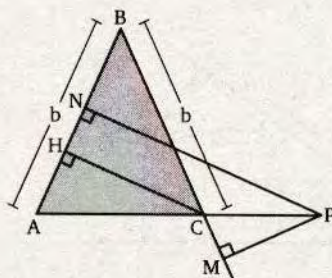
P : punto de la base

Entonces :

$$AH = PM + PN$$

Teorema: En todo triángulo isósceles; la diferencia de distancias de un punto ubicado en la prolongación de la base hacia los laterales es igual a la longitud de la altura relativa a un lateral.

a)



Si: $AB = BC$

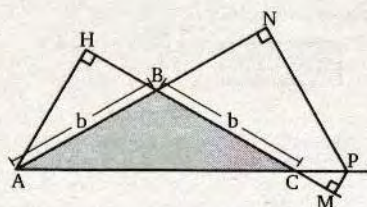
$\overline{AC}$: base

P : punto ubicado en la prolongación de AC

Entonces :

$$CH = PN - PM$$

b)



Si: $AB = BC$

$\overline{AC}$: base

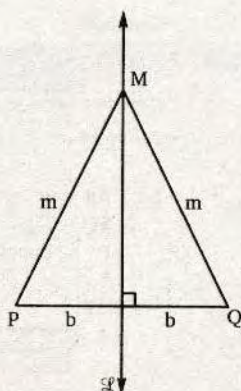
P : punto ubicado en la prolongación de AC

Entonces :

$$AH = PN - PM$$

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Cualquier punto de la mediatriz de un segmento se encuentra a igual distancia de los extremos del segmento.



ℓ : mediatriz de $\overline{PQ}$

M : punto de la mediatriz

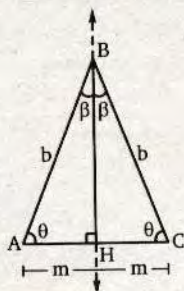
Entonces:

$$MP = MQ$$



NOTA

Teorema: En todo triángulo isósceles; la altura relativa a la base es a su vez mediana, bisectriz y está contenida en la mediatriz de la base.



$\overline{AC}$: Base

$\overline{BH}$: Altura relativa a la base

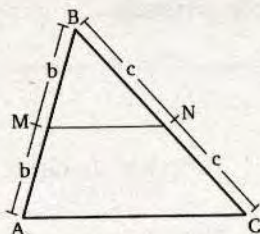
$\overline{BH}$: Bisectriz interior

$\overline{BH}$: Mediana

$\overline{BH}$: Porción de mediatriz

BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Es el segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo.



Si: $AM = MB$ y $CN = NB$

Entonces:

$\overline{MN}$: base media del $\triangle ABC$

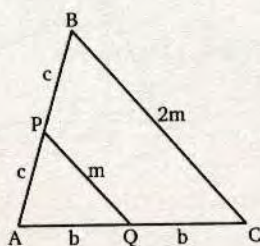


NOTA

Todo triángulo tiene tres bases medias.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

En todo triángulo se cumple que cualquier base media es paralela a un lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



Si: $\overline{PQ}$ es base media

Entonces:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$$

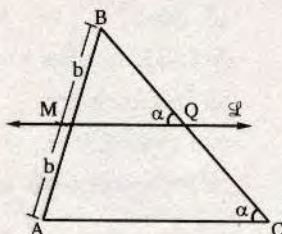
Además:

$$PQ = \frac{BC}{2}$$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 02

NOTA

Teorema: Si por el punto medio de un lado de un triángulo pasa una recta paralela a otro de sus lados, entonces dicha recta cortará al tercer lado en su punto medio.



Si: $AM = MB$ y $\overleftrightarrow{MQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

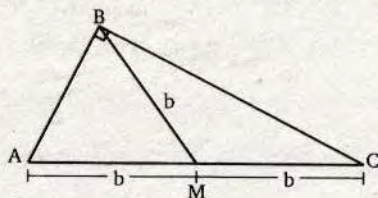
Entonces:

$$BQ = QC$$

Además $\overline{MQ}$ será una base media del triángulo

TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

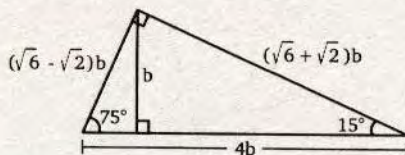
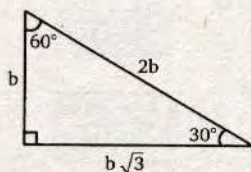
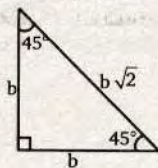


$\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa
($AM = MC$)

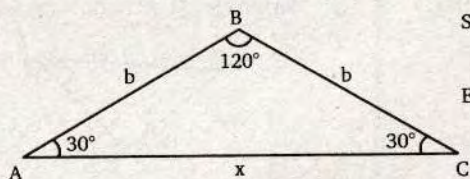
Entonces:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES



NOTA

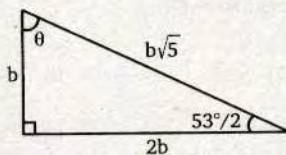
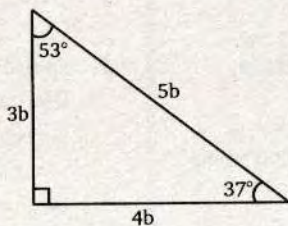


Si: $AB = BC$ y $m\angle ABC = 120^\circ$

Entonces:

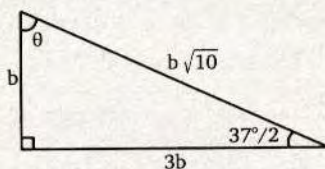
$$x = b\sqrt{3}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS APROXIMADOS



$$\frac{53^\circ}{2} = 26^\circ 30' = 26,5^\circ$$

$$\theta = \frac{127^\circ}{2} = 63^\circ 30' = 63,5^\circ$$

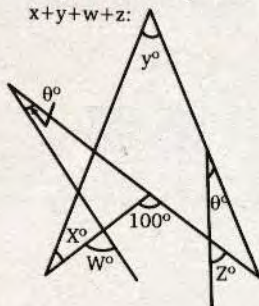


$$\frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30' = 18,5^\circ$$

$$\theta = \frac{143^\circ}{2} = 71^\circ 30' = 71,5^\circ$$

PROBLEMAS RESUELTOS

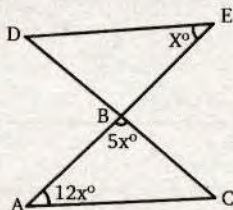
1. A partir del grafico calcular :
 $x+y+w+z$:



- A) 100 B) 150 C) 180
D) 400 E) 200
2. Las medidas de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 7. Calcular el mínimo valor entero de perímetro.
- A) 45 B) 42 C) 47
D) 43 E) 40
3. Los ángulos de un triángulo ABC miden: $m\angle BAC = x + y$,
 $m\angle ABC = x - y$; $m\angle BCA = 4y - x$
¿Cuál es el mínimo valor entero de y?
- A) 18 B) 20 C) 23
D) 25 E) 30
4. En el interior de un triángulo ABC de perímetro 36 se tomó el punto O y la medida de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son x , $2x$ y $3x$ respectivamente. Determine el menor valor entero que puede tomar x .

- A) 3 B) 4 C) 5
D) -6 E) 47

5. En la figura, Si $AC = CD = DE$, calcule " x "

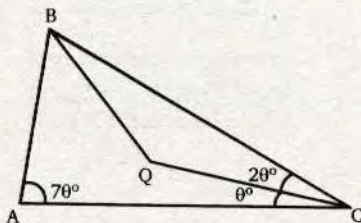


- A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

6. En el triángulo ABC ($AB = BC$). $D \in \overline{AB}$ y $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ ($E \in \overline{AC}$). La prolongación de $\overline{DE}$ intercepta a un rayo $\overline{CX}$ que forma con $\overline{CA}$ un ángulo congruente con el ángulo BCA, en el punto F. Si $AD = a$ y $CF = b$, entonces la longitud de $\overline{BD}$ es:

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2b-a}{2}$ C) $\frac{2a-b}{2}$
D) $\frac{b-a}{2}$ E) $b-2a$

7. $AB = BQ = QC$, calcular θ .

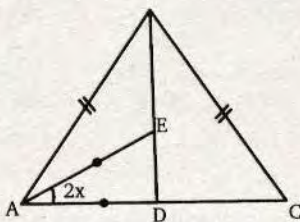


- A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 15

8. En un triángulo ABC, $m\angle A = 3(m\angle C)$. si $AB = 4$ y el ángulo BAC es obtuso, calcule el mayor valor entero de BC.

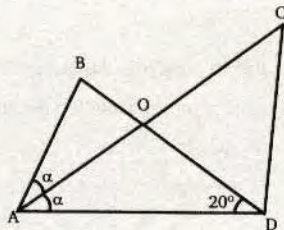
A) 11 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

9. En la figura calcula el mayor valor entero de "X":



A) 29° B) 30° C) 31°
D) 20° E) 10°

10. En la figura. si $AB=OD=DC$ podemos afirmar que :

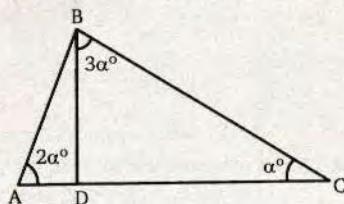


A) $10 < \alpha < 70$ B) $15 < \alpha < 60$
C) $20 < \alpha < 80$
D) $5 < \alpha < 75$ E) $5 < \alpha < 65$

11. En un triángulo ABC, se ubican los puntos N en AB y M en BC con la siguiente condición: $m\angle BAM = 20$, $m\angle MAC = 60$, $m\angle ACN = 50$ y $m\angle BCN = 30$. Entonces ¿Cuál es la medida del ángulo MNC?

A) 60 B) 70 C) 75
D) 80 E) 85

12. En la figura $AB+BD=29$. Calcular CD.



A) 24 B) 27 C) 29
D) 25 E) 14,5

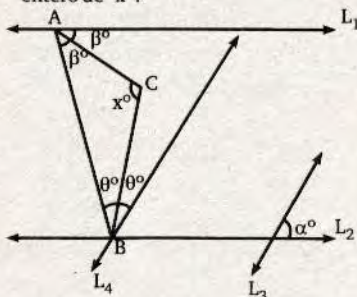
13. En un triángulo ABC. Se traza la ceviana $\overline{BD}$ ($D \in AC$). Si: $m\angle BDC = 2m\angle BCD = 40$ y $AC = BD + BC$, entonces $m\angle BAC$ es:

A) 15 B) 18 C) 20
D) 30 E) 36

14. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC interceptan a la hipotenusa en los puntos M y N. Si $AB + BC - AC = K$. Entonces MN es:

A) k B) $2k/3$ C) $k/2$
D) $3k/4$ E) $3k/5$

15. En la figura mostrada se tiene que rectas $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ $\overline{L_3} \parallel \overline{L_4}$. Si $a < 60$, entonces, ¿Cual es el mayor valor entero de "x"?

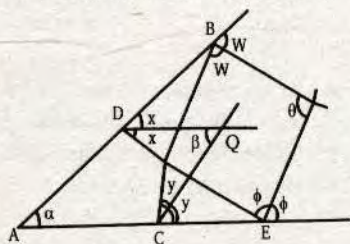


- A) 117 B) 118 C) 119
D) 120 E) 125

16. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{CD}$. En la prolongación de $\overline{CD}$ se ubica el punto M, y la bisectriz del ángulo AMC intercepta a $\overline{AB}$ en P. Si $m\angle BAC = 2m\angle MAB$ y el ángulo ABC es agudo, entonces la menor medida entera del ángulo APM es:

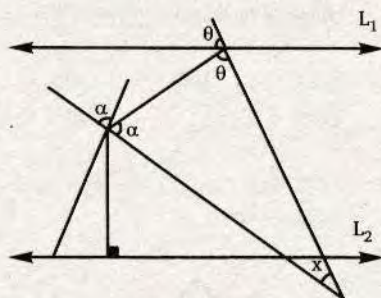
- A) 112 B) 113 C) 114
D) 116 E) 115

17. Considerando el esquema gráfico mostrado calcule el valor de $\alpha + \beta + \theta$



- A) 90° B) 180° C) 135°
D) 270° E) 360°

18. En la figura $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ Calcule el máximo valor entero de "x"



- A) 29° B) 14° C) 44°
D) 59° E) 74°

19. En n triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$) tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Si $m\angle ABD = 30$, $m\angle DBC = 70$ y $m\angle BCA = 40$. Entonces $m\angle BAC$ es

- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 42° E) 45°

20. En un triángulo ABC recto en C, se construye el triángulo isósceles AQB. Si $AC=b$ y $BC=a$ ($a < b$), entonces ¿Cual es la distancia de O al lado $\overline{AC}$?

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{b-a}{2}$ C) $\frac{b+2a}{2}$
D) $\frac{a+b}{3}$ E) $\frac{2a+b}{4}$

28. Se tiene el triángulo ABC ($AB < BC$) $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, de modo que $BP = QC$. si las mediatrices de PQ y BC se intersecan en F, entonces $\overline{BF}$ es:

A) la altura relativa al lado AC
B) la bisectriz del $\angle ABC$
C) la mediana relativa al lado AC
D) la mediatriz relativa al lado AC
E) la mediatriz de AB

29. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$. Si: $m\angle ACB = 2m\angle MAC$ y $m\angle BAM = 30^\circ$, entonces la $m\angle ABC$ es:

A) 120° B) 110° C) 105°
D) 95° E) 85°

30. Se tiene el triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BD}$, la prolongación de la mediana $\overline{AE}$ del triángulo ABD intercepta al lado $\overline{BC}$ en F. Entonces, Se cumple que:

A) $FC = \frac{1}{2}(BF)$ B) $FC = 2(BF)$
C) $FC = 4(BF)$
D) $FC = BF$ E) $FC = (BF)$

31. En un triángulo ABC, donde $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ una recta secante al triángulo intercepta en P a $\overline{BC}$ y en M a la prolongación de $\overline{CA}$. La recta $\overline{MP}$ intercepta $\overline{AB}$ en N. Si $AN = a$, $BN = b$ ($a < b$) y $\overline{MN} \cong \overline{NP}$, entonces la longitud de $\overline{BP}$ es:

A) $b - a$ B) $\frac{(a+b)}{2}$ C) $2a - b$
D) $\frac{(b-a)}{2}$ E) $\frac{(2a+b)}{3}$

32. En un triángulo ABC, recto en B y de mediana $\overline{BM}$; calcule AC si la suma de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre $\overline{BM}$ es "a".

A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{a}{2}$ C) a
D) $\frac{3a}{2}$ E) 2a

33. En un triángulo BAC recto en A se traza la ceviana $\overline{CN}$ tal que: $BN = 2AN$. En el triángulo BNC se traza la mediana $\overline{NM}$. Si $m\angle ACN = 10^\circ$; entonces la $m\angle MNC$ es

A) 20° B) 18° C) 22°
D) 24° E) 30°

34. En un triángulo isósceles ABC, se ubica el punto E exterior al triángulo tal que $\overline{BE}$ intercepta a $\overline{AC}$. Si $m\angle ABC = 100^\circ$, $m\angle CAE = 30^\circ$ y $\overline{AB} \cong \overline{CE}$, entonces ¿Cuál es la medida del ángulo AEC?

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

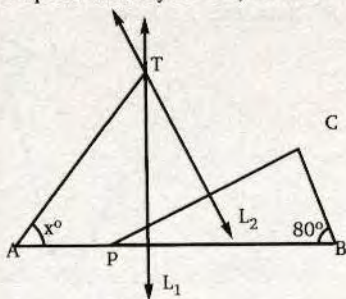
35. En un triángulo ABC, se ubica punto D exterior al triángulo tal que $\overline{BD}$ interseca al lado $\overline{AC}$ y $BD = BC$. Luego, se ubica el punto E en $\overline{AC}$ con la condición $AB = EC$. Si $m\angle BCA = 20^\circ$, $m\angle BAC = 60^\circ$ y $m\angle ABD = 40^\circ$, entonces ¿Cuál es la medida del ángulo BDE?

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 55°

36. En el triángulo rectángulo ABC, la altura $\overline{BF}$ relativa a la hipotenusa intercepta a la bisectriz interna $\overline{AP}$ en E. Se traza $\overline{EQ}$ paralelo a $\overline{AC}$ donde Q pertenece a $\overline{BC}$, entonces se puede afirmar que:

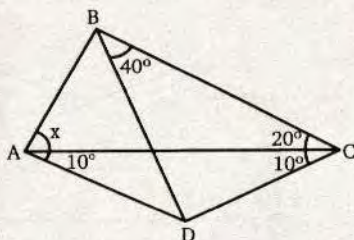
A) $QC = 1/2(EP)$ B) $QC = BP$
 C) $QC = 3/2(EP)$
 D) $QC = 2BP$ E) $QC = 5/2(EP)$

37. Si $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{PC}$ respectivamente y $AP = BC$, calcular x



A) 60 B) 50 C) 40
 D) 20 E) 65

38. A partir del gráfico calcular x.



A) 40° B) 30° C) 35°
 D) 50° E) 25°

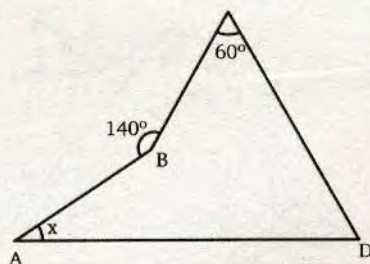
39. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo BAC y la bisectriz exterior del ángulo C se interceptan en el punto E. Por E se traza una recta paralela al lado $\overline{AC}$, que intercepta a $\overline{BC}$ en M y al Lado $\overline{AB}$ en N. Si $AN - MC = K$ (k es un número entero) entonces la menor longitud entera de $(BN + BM)$ es:

A) k B) k - 1 C) k + 1
 D) k - 2 E) k + 2

40. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ interceptan a la altura en los puntos P y Q respectivamente. Si $BE - BF = \ell$ entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

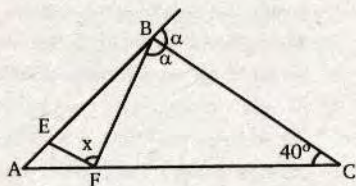
A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$
 D) ℓ E) 2ℓ

41. Del gráfico, calcule x, siendo:
 $AB = BC = CD$



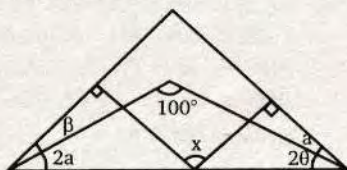
A) 20° B) 30° C) 10°
 D) 15° E) 25°

42. En la figura, $AE=EF$, Hallar x .



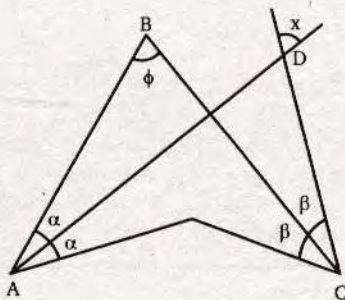
- A) 120° B) 140° C) 80°
D) 60° E) 90°

43. Del gráfico. calcule x .



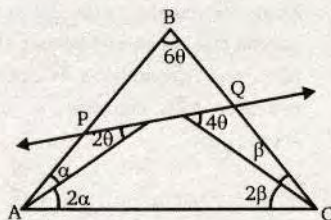
- A) 120° B) 110° C) 100°
D) 140° E) 125°

44. Del gráfico, si $\alpha + \beta + \phi = 28^\circ$, calcular x .



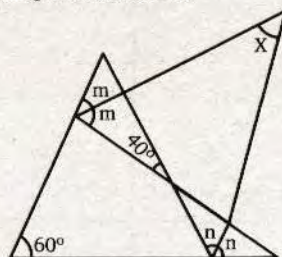
- A) 20° B) 56° C) 21°
D) 28° E) 30°

45. En la figura, hallar θ .



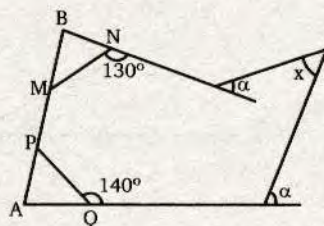
- A) 11° B) 12° C) 13°
D) 14° E) 15°

46. En el gráfico, calcular x .



- A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

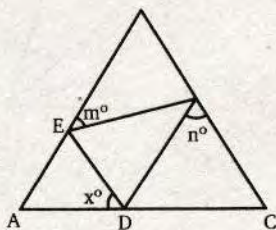
47. Si $BM=BN$ y $AQ=PQ$, calcule x .



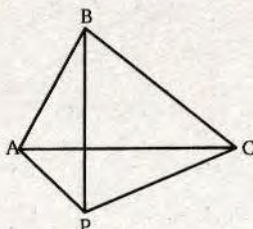
- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 45°

48. Si: $AB = BC$, $DF = EF$ y $m + n = 80$,
Calcular "x"

- A) 20
B) 25
C) 40
D) 50
E) 80

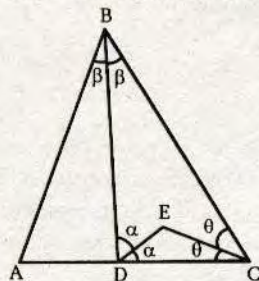


49. Si: $AP = 3$, $PC = 5$ y $AB + BC = 16$
Calcular el mayor valor entero de BP



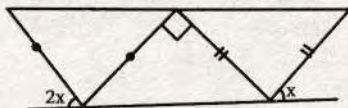
- A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

50. En la figura, $m\angle BAC = 80^\circ$ y
 $m\angle BCA = 40^\circ$. Calcular la $m\angle DEC$



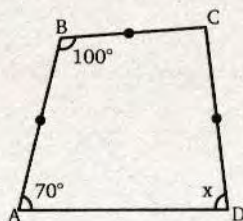
- A) 105° B) 115° C) 100°
D) 95° E) 85°

51. En la figura, hallar θ .



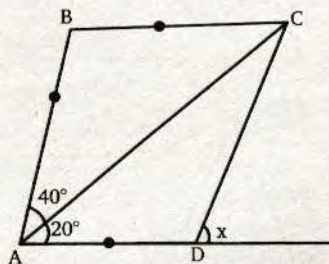
- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 40°

52. En el gráfico, calcular x.



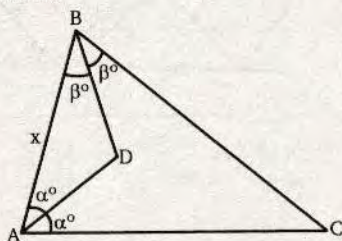
- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 40°

53. En la figura, Calcular "x".



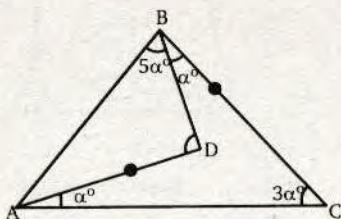
- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

54. En la figura, calcular los valores enteros que pueden tomar " x ", si $AD = 2$ y $BD = 7$



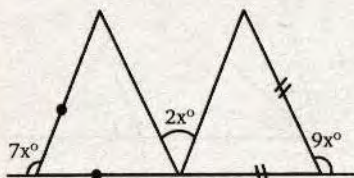
- A) 6; 7; 8 B) 7; 8 C) 6; 7
D) 8 E) 6

55. En la figura, calcular " α ".



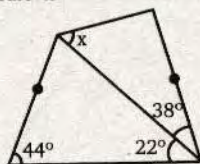
- A) 20 B) 18 C) 10
D) 12 E) 15

56. En la figura, calcular " x ".



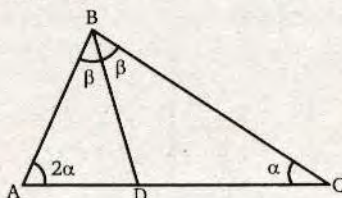
- A) 15 B) 18 C) 20
D) 12 E) 10

57. Calcule " x ".



- A) 20° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 45°

58. En la figura $AB = 7$ m y $BC = 11$ m. Halle AD .



- A) 3 m B) 4 m C) 5 m
D) 5 m E) 6 m

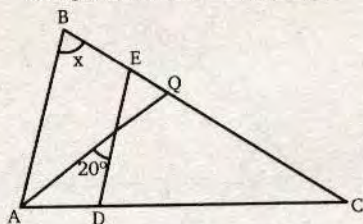
59. Los lados de un triángulo isósceles miden 5 m y 12 m. Halle el semiperímetro del triángulo.

- A) 11 m B) $\frac{37}{2}$ m C) $\frac{53}{2}$ m
D) 22 m E) $\frac{29}{2}$ m

60. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BP}$, la mediatriz de $\overline{AC}$ intercepta a $\overline{BP}$ en su punto medio. Si $m\widehat{BAC} = 45^\circ$ y $AB = 6$ m, halle PC.

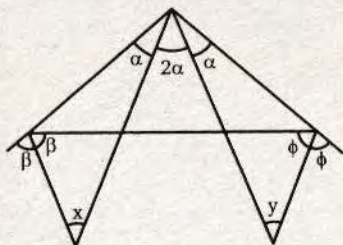
- A) $2\sqrt{2}$ m B) 3 m C) 2 m
D) $3\sqrt{2}$ m E) $\sqrt{3}$ m

61. En la figura. AQ es bisectriz del triángulo ABC. Si $EC = CD$, halle x .



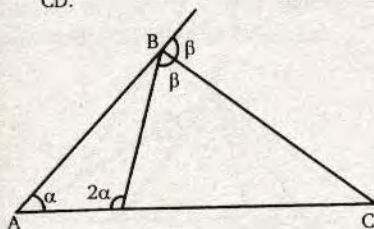
- A) 40° B) 30° C) 45°
D) 50° E) 60°

62. En la figura, calcular $(x+y)$.



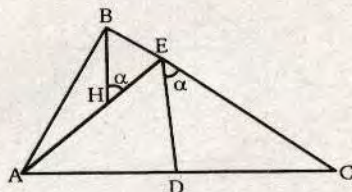
- A) 120° B) 180° C) 60°
D) 90° E) 45°

63. En la figura, $AB=6$ m y $BD=4$ m. Halle CD.



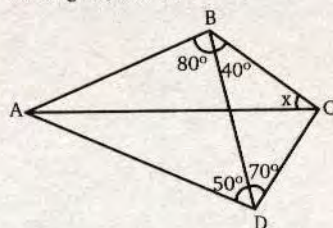
- A) 7 m B) 9 m C) 8 m
D) 10 m E) 12 m

64. En la figura, $AC = BC$ y $AH = HB$. Si $\overline{ED}$ es mediana del triángulo AEC, halle $m\widehat{AEC}$.



- A) 80° B) 90° C) 100°
D) 120° E) 110°

65. En la figura, halle x .



- A) 30° B) 20° C) 10°
D) 40° E) 15°

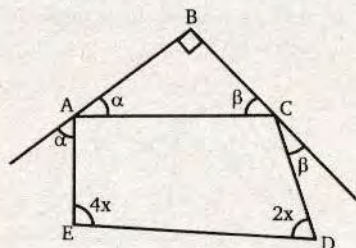
66. En un triángulo ABC de altura $\overline{BH}$, de incentro "I" y "E" excentro relativo a lado de $\overline{BC}$, $BC = 2BH$ y $AB = BC$. Halle: $m\widehat{EIH}$

- A) 90° B) 95° C) 100°
D) 105° E) 110°

67. En un triángulo ABC, Q es un punto exterior del triángulo ABC relativo a $\overline{BC}$, tal que $AQ = AC$ y $m\widehat{BAQ} = 2m\widehat{BCQ}$. Si $AB = BC$, hallar $m\widehat{ACB}$.

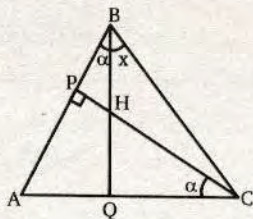
- A) 45° B) 60° C) 70°
D) 30° E) 40°

68. En la figura. Halle
- x



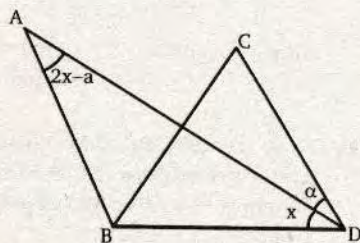
- A) 20° B) 40° C) 30°
D) 25° E) 35°

69. En la figura,
- $AQ = OH$
- . halle
- x



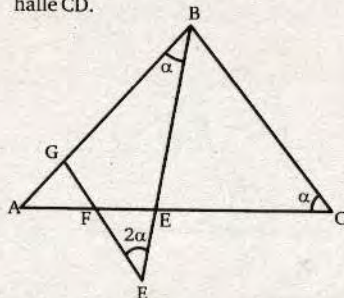
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

70. En la figura,
- $AB=BC=CD$
- . halle
- x



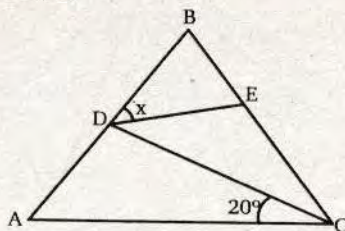
- A) 30° B) 12° C) 36°
D) 18° E) 15°

71. En la figura,
- $AG = GF$
- si
- $BC = 4$
- m, halle
- CD
- .



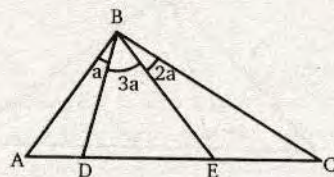
- A) 3 m B) 4 m C) 5 m
D) 6 m E) 2 m

72. En la figura,
- $AB = BC$
- y
- $DE = EC$
- , Halle
- x
- .



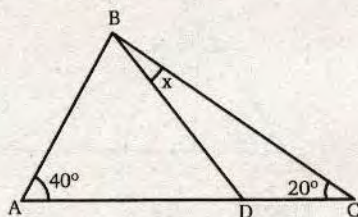
- A) 20° B) 40° C) 25°
D) 30° E) 45°

73. En un triángulo ABC de altura
- $\overline{BH}$
- , de incentro "I" y "E" excentro relativo al lado de
- $\overline{BC}$
- ,
- $BC = 2BH$
- y
- $AB=BC$
- . Halle
- α



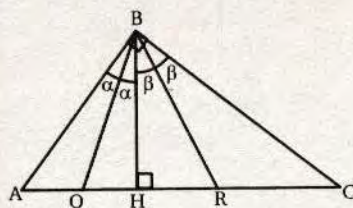
- A) 10° B) 18° C) 20°
D) 12° E) 15°

74. Calcular "x", si $BC = AD$



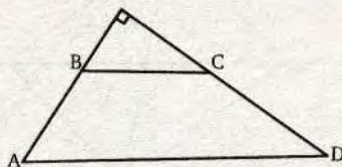
- A) 20° B) 10° C) 15°
D) 16° E) 30°

75. En la figura, $AB = 3$ m y $BC = 4$ m.
Halle QR.



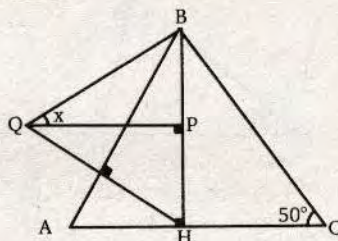
- A) 2 m B) 2,5 m C) 3 m
D) 3,5 m E) 4 m

76. En la figura, $AB = BC = CD$. Halle la medida del menor ángulo que determinan $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



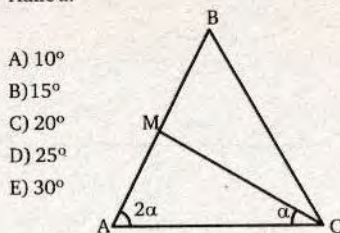
- A) 15° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 37°

77. En la figura, $AH = HP$ y $BP = HC$.
Halle x



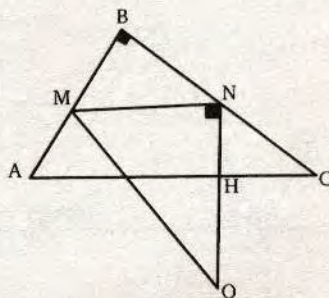
- A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

78. En la figura, $AM = MB$ y $\widehat{BCA} = 60^\circ$.
Halle a.



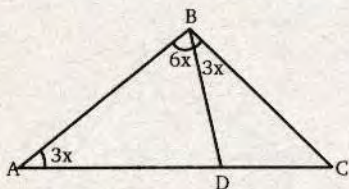
- A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°

79. En la figura, los triángulos ABC y MNQ son congruentes ($BC = NQ$), $AM = MB$, $BN = NC$. Si $AC = 8$ m, halle NH.



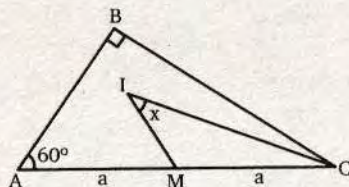
- A) $\sqrt{2}$ m B) $\sqrt{3}$ m C) 1 m
D) 2 m E) 3 m

80. En la figura, $AD = BC$. Hallar x



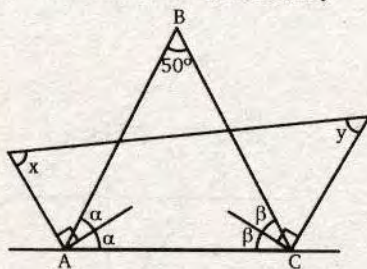
- A) 18° B) 16° C) 15°
D) 10° E) 12°

81. Si I es incentro del triángulo ABC, calcule x .



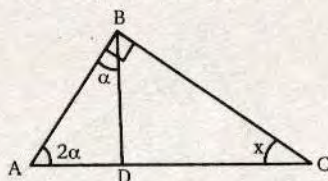
- A) 15° B) 30° C) 45°
D) 10° E) 20°

82. Si la $m\angle ABC = 50^\circ$, Calcule $x + y$



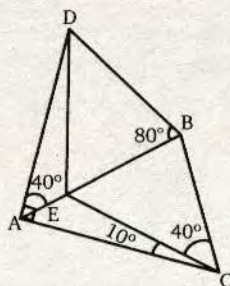
- A) 105° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 125°

83. Según el gráfico, $AB = CD$, calcule x



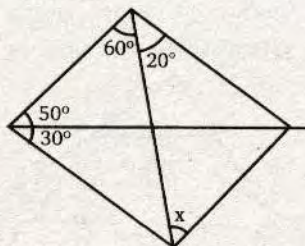
- A) 30° B) 40° C) 45°
D) 45° E) 60°

84. Del gráfico, calcule $m\angle ADE$.



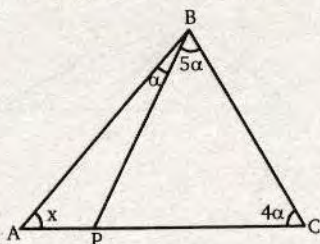
- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

85. Del gráfico, calcule x .



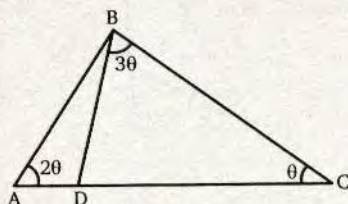
- A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60°

86. En la figura, $PC = AB$. Hallar x



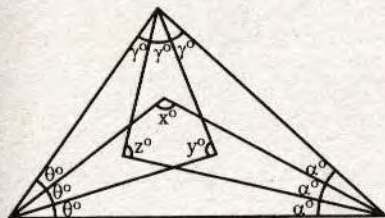
- A) 45° B) 30° C) 25°
D) $\frac{300^\circ}{7}$ E) $\frac{45^\circ}{2}$

87. Del gráfico, $AB=6$ cm, $BD=4$ cm, calcule DC.



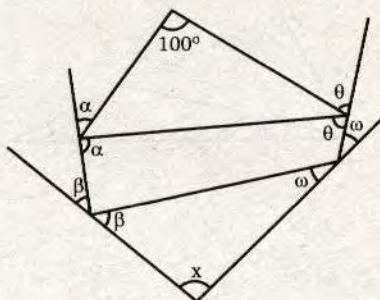
- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

88. En la figura mostrada determinar:
 $x + y + z$



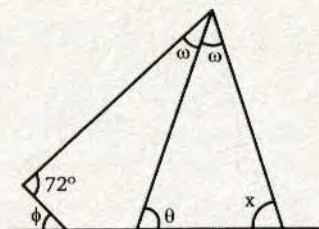
- A) 270° B) 300° C) 360°
D) 340° E) 380°

89. Del gráfico, calcule x



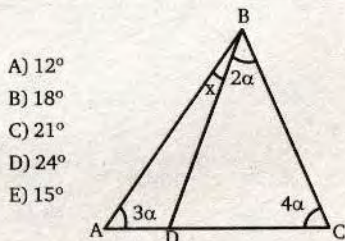
- A) 100° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 130°

90. Del gráfico, si $\phi + 2\theta = 180^\circ$, calcule x .



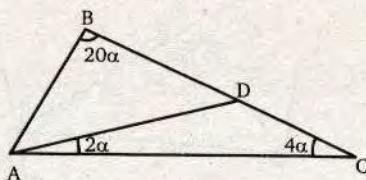
- A) 70° B) 72° C) 74°
D) 80° E) 82°

91. En la figura, $AC = BD$. Hallar x



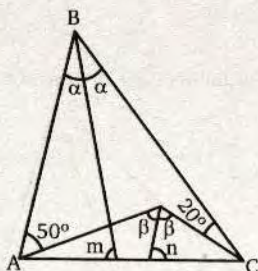
- A) 12°
B) 18°
C) 21°
D) 24°
E) 15°

92. En la figura, $AB=DC$. Hallar α .



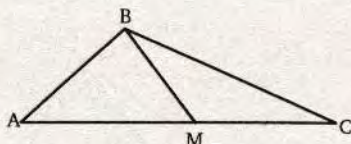
- A) 8° B) 6° C) 4°
D) 7° E) $\frac{15^\circ}{2}$

93. En el triángulo ABC, calcule $m+n$.



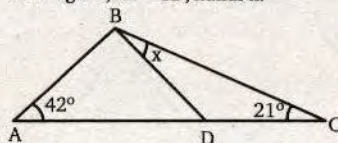
- A) 165° B) 160° C) 140°
D) 195° E) 200°

94. En la figura, $AM=MC$, $m\widehat{BAC} = 30^\circ$ y $m\widehat{BCA} = 15^\circ$. Hallar $m\widehat{MBC}$.



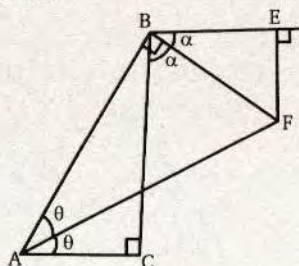
- A) 30° B) 42° C) 45°
D) 36° E) 50°

95. En la figura, $AB=CD$, hallar x .



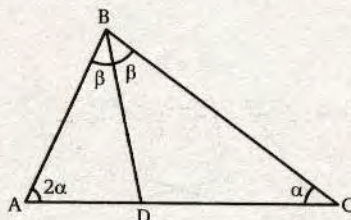
- A) $\frac{53^\circ}{2}$ B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) 21°
D) 30° E) $\frac{45^\circ}{2}$

96. Del gráfico, si $AB=13$ cm y $BC=12$ cm, calcule EF



- A) 6 cm B) 7 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 10 cm

97. En la figura, $AB = 7$ cm y $BC = 10$ cm. Halle AD.



- A) 3 cm B) 2 cm C) 4 cm
D) 5 cm E) 6 cm

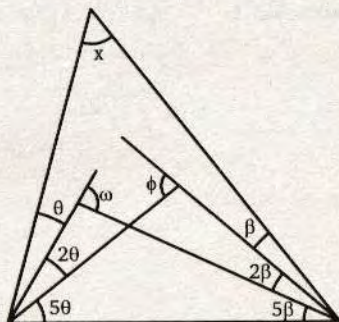
98. En un triángulo ABC, D es un punto de $\overline{AC}$ tal que $AB = CD$, $m\widehat{DBC} = 2m\widehat{MAC}$ y $m\widehat{DBC} + m\widehat{ABC} = 180$. Hallar $m\widehat{BAC}$

A) 30° B) 45° C) 27°
D) 42° E) 36°

99. En un triángulo PQR, $m\widehat{QPR} = 130^\circ$ y las mediatrices de los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ intersecan a $\overline{QR}$ en M y N respectivamente. Halle $m\widehat{NPM}$.

A) 70° B) 75° C) 90°
D) 80° E) 85°

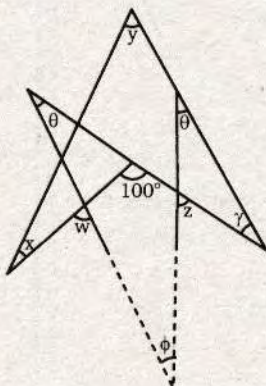
100. Del gráfico, si $\omega + \phi = 6x$, calcule x.



A) 20° B) 25° C) 36°
D) 40° E) 54°

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:**Piden $p+y+z+w$

Con la finalidad de formar figuras cuyas propiedades se conocen prolonguemos algunas líneas; luego:



Por propiedad de:

$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{ "}\sphericalangle\text{"}: \theta + \phi = \theta + \gamma \rightarrow \phi = \gamma \\
 &\bullet \text{ "}\sphericalangle\text{"}: 100^\circ = x + y + \gamma \\
 &\bullet \text{ "}\sphericalangle\text{"}: 100^\circ + \phi = w + z \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\bullet \text{ "}\sphericalangle\text{"}: 100^\circ = x + y + \gamma \\ &\bullet \text{ "}\sphericalangle\text{"}: 100^\circ + \phi = w + z \end{aligned}} \right\} (+) \\
 &\quad 200^\circ + \cancel{\phi} = x + y + z + w + \cancel{\gamma} \\
 \therefore 200^\circ &= x + y + z + w
 \end{aligned}$$

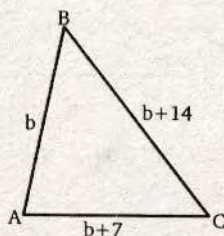
Rpta.: E**Resolución 02:**

Piden :

$$2p = 3b + 21 \quad (2p_{\min} \wedge 2p \in \mathbb{Z})$$

Se sabe por existencia: $b + 14 < b + b + 7$

$$\begin{aligned}
 7 &< b && \dots \times (3) \\
 \rightarrow 21 &< 3b && \dots + (21) \\
 42 &< \underbrace{3b + 21} \\
 42 &< 2p \\
 \therefore 2p_{\min} &= 43
 \end{aligned}$$

Rpta.: D

TRIÁNGULOS

Resolución 03:

Piden : $y_{\min} (y \in \mathbb{Z})$

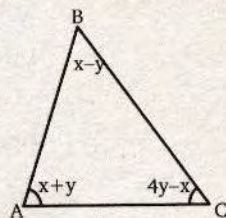
Del triángulo se obtiene:

- $x + 4y = 180^\circ \rightarrow x = 180^\circ - 4y$
- $x - y > 0 \rightarrow 180^\circ - 4y - y > 0$
 $36^\circ > y \quad \dots(I)$
- $4y - x > 0 \rightarrow 4y - (180^\circ - 4y) > 0$
 $y > 22,5^\circ \quad \dots(II)$

De (I) $\wedge$ (II): $22,5^\circ < y < 36^\circ$

$$\therefore y_{\min} = 23^\circ$$

Rpta.: C



Resolución 04:

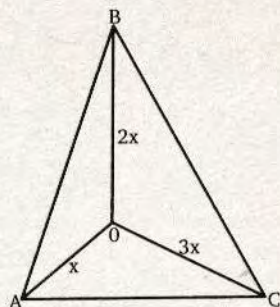
Piden : $x_{\min} (x \in \mathbb{Z})$ Dato : $2p = 36$ Por propiedad: $p < x + 2x + 3x < 2p$

$$18 < 6x < 36$$

$$3 < x < 6$$

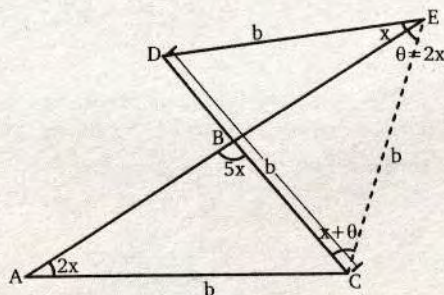
$$\therefore x_{\min} = 4$$

Rpta.: B

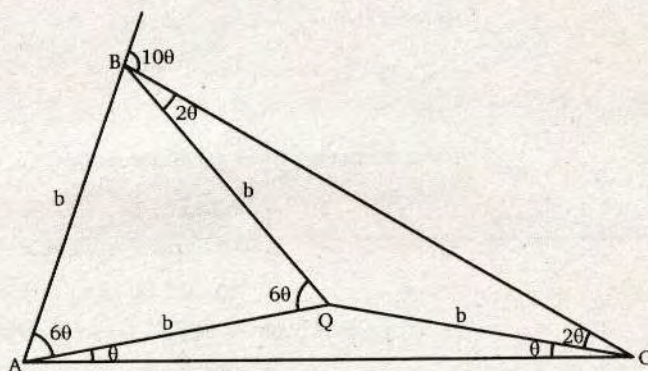


Resolución 05:

Piden: x

Dato : $AC = CD = DE$ Sea : $m\angle BEC = \theta \rightarrow m\angle DCE = x + \theta$ 

Resolución 07: Luego de indicar los datos en el gráfico se deduce :



- $m\angle TBC = 10\theta$ (ΔABC)
- $m\angle QBC = 2\theta$ ($BQ = QC$)
- $m\angle BAQ = m\angle BQA = 6\theta$ (ΔABQ)

Ahora se observa: $m\angle QAC = \theta \wedge AQ = \theta C = b$

ΔABQ : Equilátero $\rightarrow 6\theta = 60^\circ$

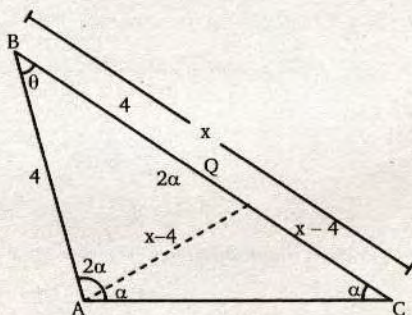
$$\therefore \theta = 10^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 08: Piden: $x_{\max} (x \in \mathbb{Z})$

Dato : $3\alpha > 90^\circ$

$$\rightarrow 4\alpha > 120^\circ \quad \dots(I)$$



En ΔABC : $4\alpha + \theta = 180^\circ$

$$\text{En (I):} \quad \rightarrow 4\alpha = 180^\circ - \theta$$

$$180^\circ - \theta > 120^\circ$$

$$\theta < 60^\circ \quad \dots (II)$$

Ahora se traza la ceviana $\overline{AQ}$ tal que $m\angle QAC = \alpha$, entonces:

- $m\angle BQA = 2\alpha$
- $AB = BQ = 4 \wedge QC = x - 4$
- $AO = OC = x - 4$

Finalmente en el ΔABQ se sabe que $\theta < 60^\circ$ (De II) entonces:

$$x - 4 < 4$$

$$\therefore x_{\max} = 7$$

Rpta.: E

Resolución 09:

Piden : $x_{\max} (x \in \mathbb{Z})$

Del gráfico y los datos se deduce:

$$\Delta AED: \quad m\angle AED = m\angle ADE = 90^\circ - x$$
$$\Delta ABC: \quad m\angle BAC = m\angle = \theta$$

Ahora se puede observa:

- En "A": $2x < \theta$ (I)
- En ΔDBC : $\theta < 90^\circ - x$... (II)

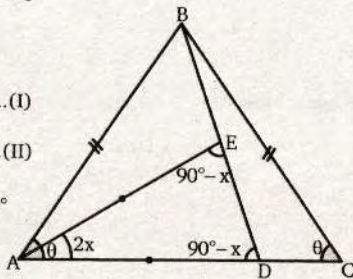
Luego (I) + (II) $2x + \theta < \theta + 90^\circ$

$$3x < 90^\circ$$

$x < 30^\circ$

$$\therefore x_{\text{máx}} = 29^\circ$$

Rpta.: A

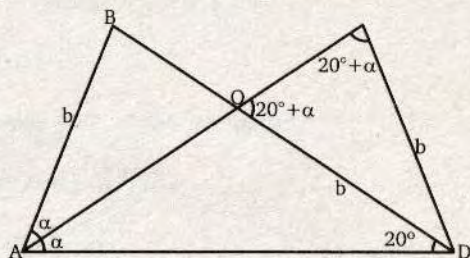


Resolución 10:

Piden el rango de valores de α

Dato : $AB = OD = DC$

Ahora se deduce:



• $\triangle ADC$: $m\angle COD = 20^\circ + \alpha$

• $\triangle ODC$: $m\angle C = m\angle COD = 20^\circ + \alpha$

Ademas : $20^\circ + \alpha < 90^\circ$

$\rightarrow \alpha < 70^\circ$ (I)

• $\triangle ABD$: $2\alpha > 20^\circ$ ($BD > AB$)

$\rightarrow \alpha > 10^\circ$ (II)

De (I) $\wedge$ (II):

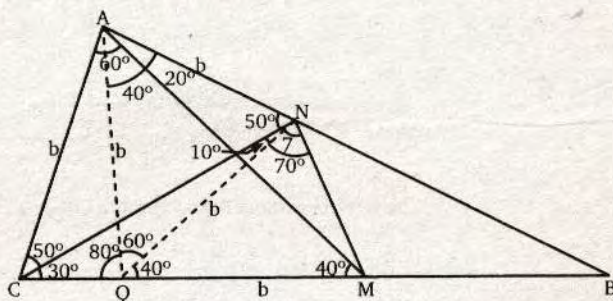
$\therefore 10^\circ < \alpha < 70^\circ$

Rpta.: A

Resolución 11:

Piden :

$m\angle MNC = x$



De los datos iniciales

• $\triangle ACN$: $m\angle ANC = 50^\circ \rightarrow AC = AN = b$

• $\triangle ACM$: $m\angle AMC = 40^\circ$

En el $\triangle ACM$ se traza la ceviana

$\overline{AQ}$ tal que $AQ = AC = b$, entonces :

$m\angle AQC = 80^\circ$, $m\angle QAM = 40^\circ \wedge QM = b$

Ahora $\triangle QAN$ es equilátero

$$\rightarrow m\angle QNC = 10^\circ \wedge m\angle NQM = 40^\circ$$

Finalmente ΔQNM es isósceles

$$\rightarrow m\angle QNM = m\angle QMN = 70^\circ$$

$$\therefore x = 80^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 12:

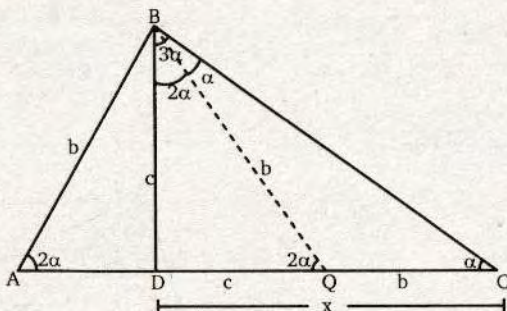
Piden :

$$CD = x$$

Dato :

$$AB + BD = 29$$

$$\rightarrow b + c = 29$$



Se traza la ceviana BQ tal que $m\angle QBC = \alpha$, entonces:

$$\bullet AB = BQ = QC = b$$

- $\triangle DBQ$: isósceles $\rightarrow DQ = BD = c$

Luego se observa que:

$$x = b + c = 29$$

$$\therefore x = 29$$

Rpta.: C

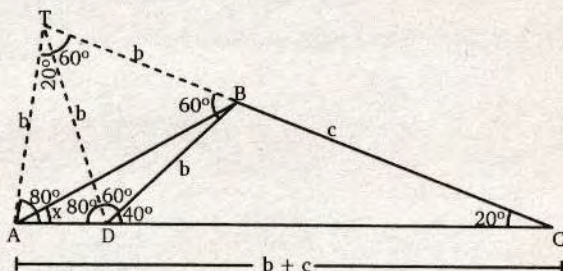
Resolución 13:

Piden :

$$m\angle BAC = x$$

Dato :

$$AC = BD + BC$$



Prolongamos $\overline{CB}$ hasta T tal que $BT = BD = b$, luego se deduce:

$$\bullet m\angle TBD = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

$$\bullet \triangle TBD : \text{equilátero} \rightarrow TD = b$$

$$\bullet \triangle ATC : \text{isósceles} (TC = AC = b + c)$$

$$\rightarrow m\angle TAC = m\angle ATC = 80^\circ$$

$$\bullet \text{En d : } m\angle ADT = 80^\circ$$

Ahora como $TA = TD = TB = b$

$$\therefore m\angle BAD = 30^\circ$$

Rpta.: D

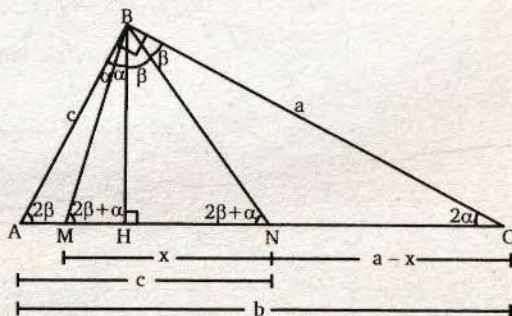
Resolución 14:

Piden :

$$MN = x$$

Dato :

$$d + c - b = k$$



Ahora se observa:

• $\Delta ABM : m\angle BMN = \alpha + 2\beta$

$\rightarrow MC = BC = a \wedge NC = a - x$

• $\Delta NBC : m\angle BNM = \beta + 2\alpha$

$\rightarrow AN = AB = c$

Luego :

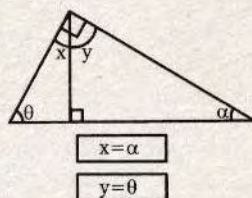
$c + a - x = b$

$\rightarrow \underbrace{a + c - b}_x = x$

$\therefore k = x$

Rpta.: A

RECORDAR



Resolución 15:

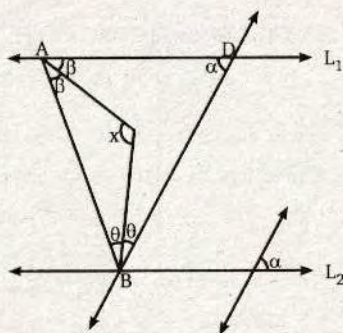
Piden :

$x_{\max} (x \in \mathbb{Z})$

Como

$\overline{L_1} // \overline{L_2} \wedge \overline{L_4} // \overline{L_3}$

$\rightarrow m\angle ADB = \alpha$



$\Delta ABD :$

$x = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots$ (Teorema)

$\rightarrow \alpha = 2x - 180^\circ$

Dato :

$\alpha < 60^\circ$

$\rightarrow 2x - 180^\circ < 60^\circ$

$x < 120^\circ$

$\therefore x_{\max} = 119^\circ$

Rpta.: C

Resolución 16:

Piden : $x_{\min} \in \mathbb{Z}$

Dato : $w < 90$

Se traza la bisectriz $\overline{AI}$ del $\angle BAC$

Ahora por teorema en:

$\triangle ABC$:

$$m\angle AIC = 90 + \frac{\omega}{2}$$

$$m\angle AIM = 90 - \frac{\omega}{2}$$

$\triangle AMI$:

$$x = 90 + \frac{1}{2}(90 - \frac{\omega}{2})$$

$$\rightarrow \omega = 4(135 - x)$$

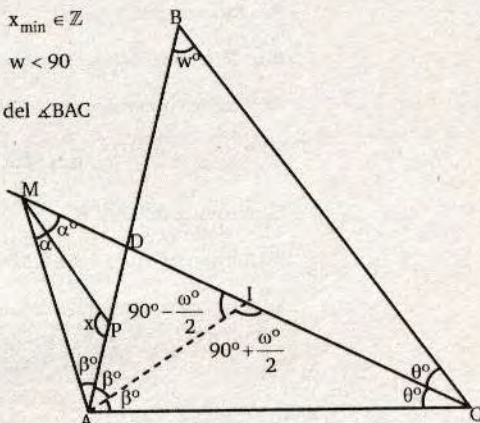
En el dato:

$$4(135 - x) < 90$$

$$112,5 < x$$

$$\therefore x_{\min} = 113$$

Rpta.: B

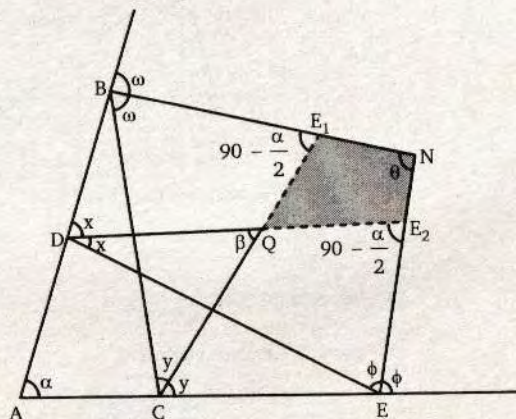


Resolución 17:

Piden :

$$P = \alpha + \beta + \theta$$

Prolongemos $\overline{CQ} \cap \overline{DQ}$ hasta cortar a $\overline{BN}$ y $\overline{NE}$ respectivamente; luego se deduce:



• E_1 : Excentro del $\triangle ABC$

$\overline{BE_1}$: bisectriz exterior del $\triangle ABC$

$\overline{CE_1}$: bisectriz exterior del $\triangle ABC$

$$\rightarrow m\angle BE_1C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

• E_2 : Excentro del $\triangle ADE$

$\overline{DE_2}$: bisectriz exterior del $\triangle ADE$

$\overline{EE_2}$: bisectriz exterior del $\triangle ADE$

$$\rightarrow m\angle DE_2E = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

• Por teorema " $\triangle$ " $\beta + \theta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$$\therefore \alpha + \beta + \theta = 180$$

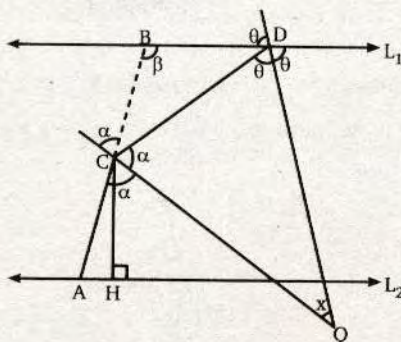
Rpta.: B

Resolución 18:

Piden

$$x_{\max} \ (x \in \mathbb{Z})$$

Por ángulos opuestos se obtiene:



Prolongamos $\overline{AC}$ hasta cortar a L_1 en B

Ahora en $\triangle BCD$:

$\overline{DQ}$: bisectriz exterior

$\overline{CQ}$: bisectriz exterior; entonces:

$$x = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\rightarrow \beta = 2(90^\circ - x) \dots\dots\dots (I)$$

Como $\overline{L_1} // \overline{L_2} \rightarrow m\angle A + \beta = 180^\circ$

Pero $m\angle A < 90^\circ (\Delta ACH)$

$$\rightarrow \beta > 90^\circ \dots\dots\dots (II)$$

(I) en (II):

$$2(90 - x) > 90$$

$$45 > x$$

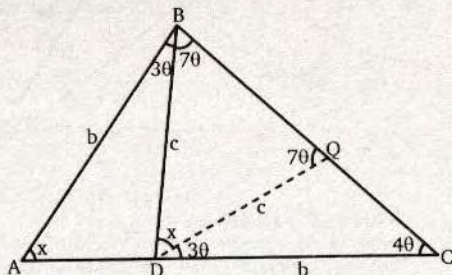
$$\rightarrow x_{\max} = 44$$

Rpta.: C

Resolución 19:

Piden :

$$m\angle BAC = x$$



En el ΔABD :

$$m\angle BDC = x + 30$$

Ahora se traza la ceviana $\overline{DQ}$ tal que $m\angle QDC = 30^\circ$; entonces:

- $\Delta DQC : m\angle BQD = 70^\circ$
- $\Delta BDC : BD = DQ = c \quad (m\angle B = m\angle Q = 70^\circ)$
- $\Delta ABD \cong \Delta CDQ (L - A - L)$

$$\rightarrow 40$$

Finalmente en el ΔABC :

$$180 = 180^\circ \rightarrow \theta = 10^\circ$$

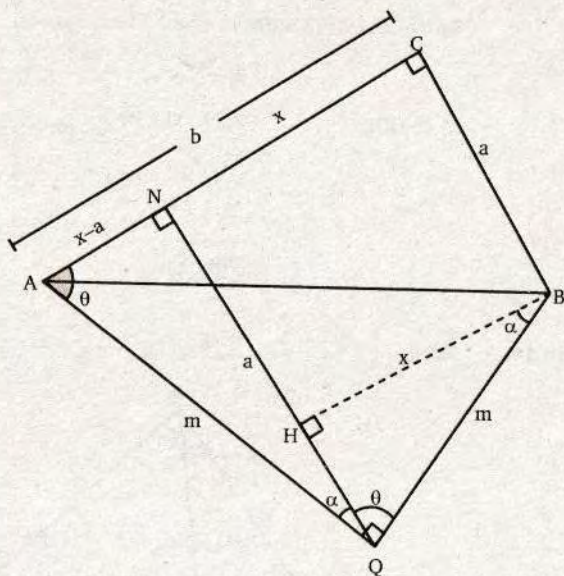
$$\therefore x = 40$$

Rpta.: C

Resolución 20:

Piden :

$QN = x$

Se traza $\overline{BH} \perp \overline{NQ}$, luego se deduce que :

$$\bullet NH = CB = a \wedge HQ = x - a$$

$$\bullet \triangle AQN \cong \triangle QBH (A - L - A)$$

Entonces:

$$AN = HQ = x - a$$

$$HB = NQ = x$$

$$\rightarrow NC = x$$

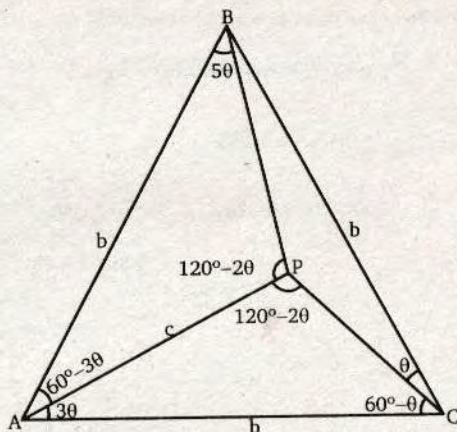
Finalmente:

$$AC = b = 2x - a$$

$$\therefore x = \frac{a+b}{2}$$

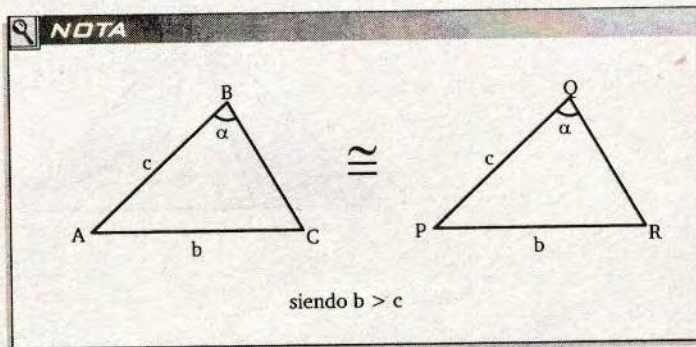
Rpta.: A**Resolución 21:**Piden: θ $\triangle ABC$: equilátero (Dato):

Entonces:



- $m\angle BAP = 60 - 3\theta \wedge m\angle PCA = 60 - \theta$
- $m\angle APB = 120 - 2\theta$ (ΔAPB)
- $m\angle APC = 120 - 2\theta$ (ΔAPC)

Ahora $\Delta APB \cong \Delta APC$ (IV caso)



Entonces en el problema:

$$3\theta = 60^\circ - 3\theta$$

$$\therefore \theta = 10^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 22: Se traza la ceviana exterior $\overline{CQ}$ tal que $CQ = CB$; entonces:

- $m\angle Q = 4\alpha \wedge m\angle ACQ = 3\alpha$

- $\triangle QCA \cong \triangle CBD$

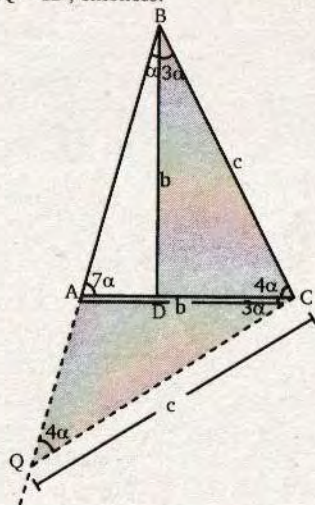
Caso (L - A - L)

$$\rightarrow m\angle BCA = 4\alpha$$

- $\triangle ABC : 15\alpha = 180^\circ$

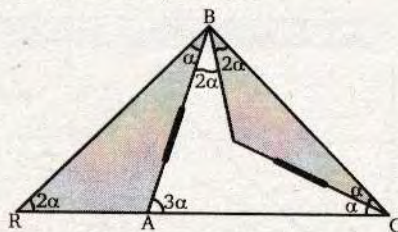
$$\alpha = 12^\circ$$

Rpta.: A



Resolución 23: Piden $m\angle ABC$

Luego de indicar los datos en el gráfico correspondiente se traza la ceviana exterior $\overline{BR}$ tal que $BR = BC$; entonces :



- $m\angle R = 2\alpha \wedge m\angle RBA = \alpha$

- $\triangle RBA \cong \triangle BCQ$ (L - A - L)

$$\rightarrow m\angle R = m\angle QBC = 2\alpha$$

- Pero $\overline{BQ}$ bisectriz $\rightarrow m\angle ABQ = 2\alpha$

Finalmente en $\triangle ABC$ $9\alpha = 180$

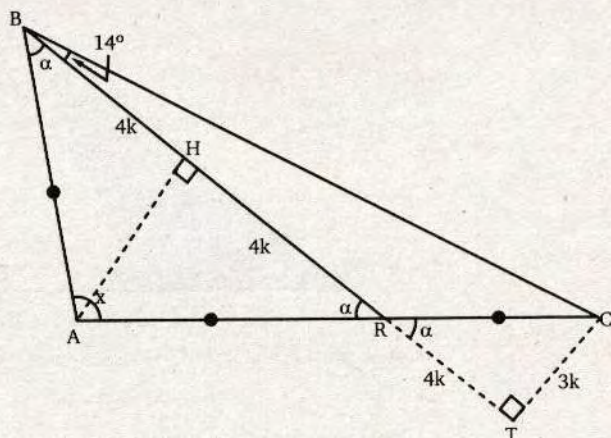
$$\alpha = 20$$

$$\therefore m\angle ABC = 80$$

Rpta.: D

Resolución 24: Piden : $m\angle BAC = x$

Luego de hacer el gráfico correspondiente se traza $\overline{CT} \perp \overline{BR}$ y $\overline{AH} \perp \overline{BR}$,
luego se observa:



• $\triangle BTC$: Notable de $14^\circ \wedge 76^\circ$

$$\rightarrow BT = 4(TC)$$

• $BH = HR$ ($AB = AR$)

• $\triangle AHR \cong \triangle CTR$ ($A - L - A$)

$$\rightarrow HR = RT$$

Ahora sea: $RT = 4k$

$$\rightarrow BH = HR = 4k \wedge TC = 3k$$

Luego:

$\triangle RTC$: Notable de $37^\circ \wedge 53^\circ$

$$\rightarrow \alpha = 37$$

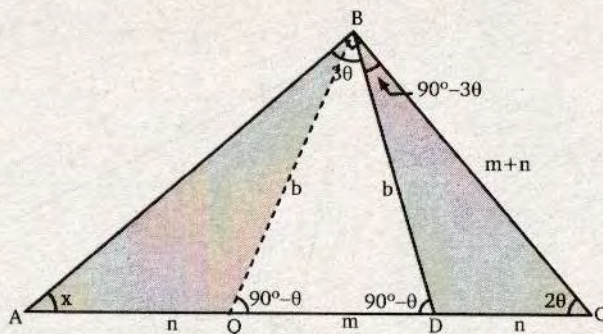
$$\therefore x = 106$$

Rpta.: C

Resolución 25: Piden : $m\angle A = x$

De los datos se deduce:

$$m\angle DBC = 90^\circ - 3\theta \wedge m\angle BDA = 90^\circ - \theta$$



Ahora se traza $\overline{BQ}$ tal que $BQ = BD$, entonces:

$$m\angle BQD = 90^\circ - \theta$$

• $\triangle QBD$: isósceles ; $BQ = QD = m + n$

• Pero : $AD = BC = m + n \rightarrow AQ = n$

Luego $\triangle AQB \cong \triangle CDB$ (L - A - L)

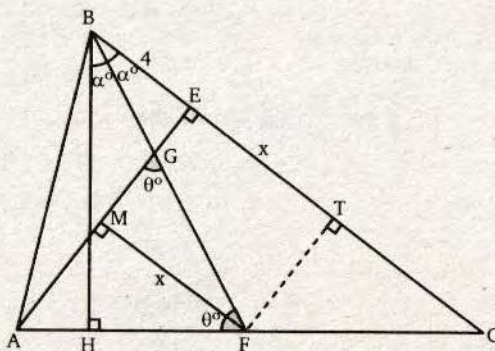
$$\rightarrow AB = BC = m + n \wedge x = 2\theta$$

En el $\triangle ABC$: $\therefore x = 45$

Rpta.: C

Resolución 26: Piden : $FM = x$

Datos : $AG = AF$, $BH = 18 \wedge BE = 4$



$\triangle AGF$ isósceles, entonces:

$m\angle AGF = m\angle AFG = \theta$; además

$$m\angle HBF = 90 - \theta \quad (\triangle HBF)$$

$$m\angle GBE = 90 - \theta \quad (\triangle GBE)$$

Ahora trazamos $\overline{FT} \perp \overline{BC}$; luego

Por el teorema de la bisectriz:

$$BH = BT = 18 = 4 + x$$

$$\therefore x = 14$$

Rpta.: C

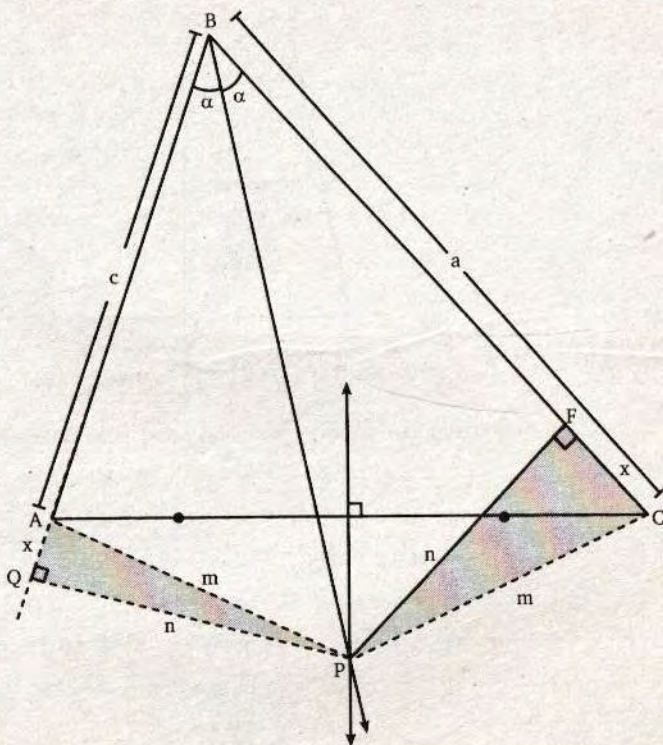
Resolución 27:

Piden

$$FC = x$$

Datos :

$$AB = c \wedge BC = a$$



$$\bullet PQ = PF \wedge BF = BQ = a - x \text{ (T. bisectriz)}$$

- PC = PA (T. mediatriz)

$$\bullet \Delta AQP \cong \Delta CFP \leftrightarrow AO = x$$

Luego:

$$BQ = BF$$

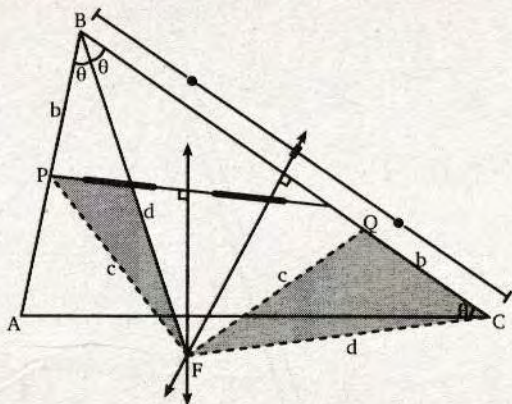
$$\rightarrow c + x = a - x$$

$$\therefore x = \frac{a - x}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 28:

Piden identificar qué línea notable es: $\overline{BF}$.



Tracemos $\overline{FP}$, $\overline{FQ}$ y $\overline{FC}$; luego por el teorema de la mediatriz

$$FP = FQ \wedge FB = FC$$

Ademas:

- $m\angle FCB = m\angle FBC$ ($\triangle FBC$: isósceles)

- $\triangle PBF \cong \triangle QCF$ (L - L - L)

$$\rightarrow m\angle PBF = m\angle FCQ = \theta$$

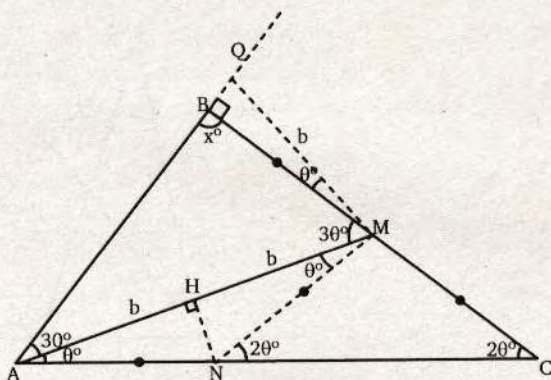
$\therefore \overline{BF}$ es bisectriz del $\angle ABC$

Rpta.: B

Resolución 29:

Piden :

$$m\angle ABC = x$$



En el $\triangle AMC$ se traza la ceviana $\overline{MN}$ tal que :

$$m\angle AMN = \theta$$

Entonces :

$$m\angle MNC = 2\theta \wedge MC = MN = AN$$

Ahora se traza:

- $\overline{NH} \perp \overline{AM} \rightarrow AH = HM = b$
- $\overline{MQ} \perp \overline{AB} \rightarrow QM = b$ (Not. $30^\circ \wedge 60^\circ$)

Luego se observa:

- $\triangle AMC : m\angle AMB = 3\theta$
- $\triangle BMQ \cong \triangle MNH \rightarrow m\angle BMQ = m\angle HAN = \theta^\circ$

Ahora en "M":

$$4\theta = 60^\circ \rightarrow \theta = 15^\circ$$

Finalmente en el $\triangle BQM$:

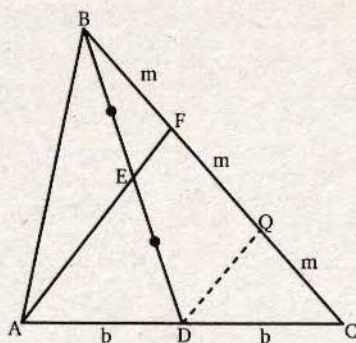
$$x = 90^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 30:

Piden: FC en función de BF

Se traza $\overline{DQ} \parallel \overline{AF}$; como $AD = DC$; entonces:

$$FD = QC = m$$

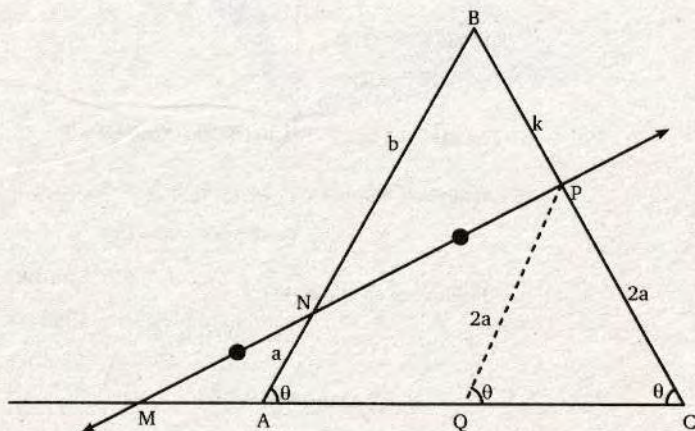
Ahora en el $\triangle DBQ$ se observa:

$$EF = DQ \wedge BE = ED$$

$$BF = FQ = m$$

$$\therefore FC = 2(BF)$$

Rpta.: C

Resolución 31:Piden: $BP = x$ Se traza $\overline{PQ} \parallel \overline{NA}$ ($Q \in \overline{AC}$), luego se deduce:

• AN : Base media del $\triangle MPQ$

$$\rightarrow PQ = 20 \wedge m\angle PQC = \theta$$

• $\triangle QPC$: isosceles ($m\angle Q = m\angle C = \theta$)

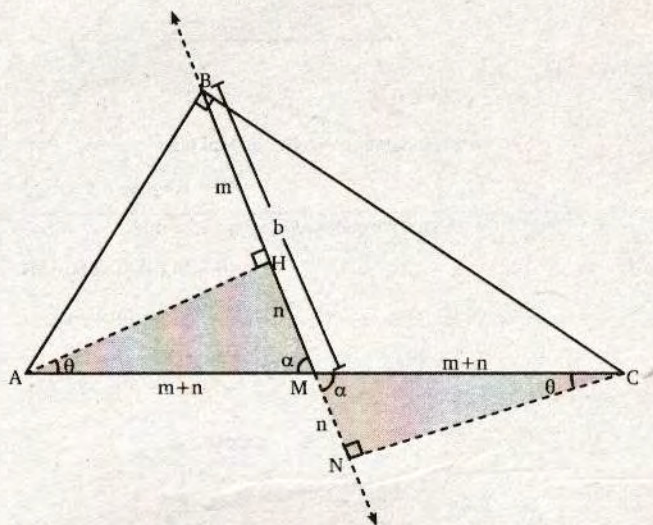
$$\rightarrow PC = PQ = 2a$$

Luego en el dato: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \rightarrow a + b = x + 2a$

$$\therefore x = b - a$$

Rpta.: A

Resolución 32:



Piden: AC

$\overline{BH}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BM}$

$\overline{BN}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{BM}$

Dato:

$$BH + BN = a$$

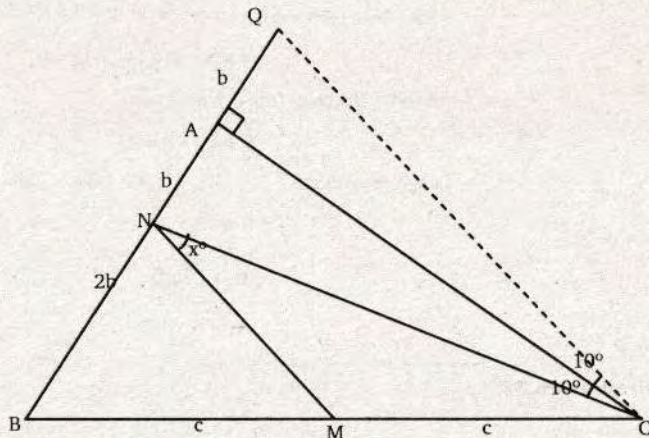
$$\Rightarrow m + (m + n + n) = a$$

$$\underline{2(m + n)} = a$$

$$\therefore AC = a$$

Rpta.: C

Resolución 33:



Piden : $m\angle MNC = x$

Prolongamos $\overline{NA}$ hasta Q tal que:

$$AQ = AN = b \rightarrow m\angle ACQ = 10$$

Ahora para el Δ AQC se observa que:

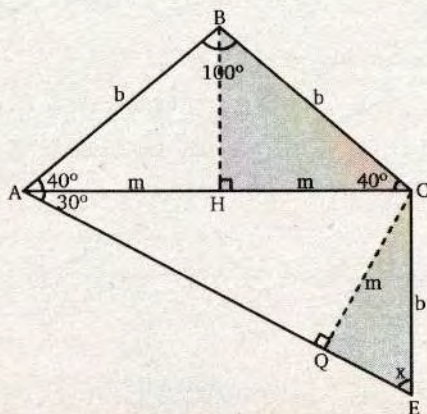
$$BN = NQ = 2b \wedge BM = MC = C$$

→ $\overline{MN}$ es base media

Luego: $\overline{MN} \parallel \overline{QC} \rightarrow x = 20$

Rpta.: A

Resolución 34:



Piden : $m\angle AEC = x$

Datos : $AB = BC = CE$

Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC} \wedge \overline{CQ} \perp \overline{AE}$, luego se deduce :

$$AH = HC = m \quad (\triangle ABC : \text{isósceles})$$

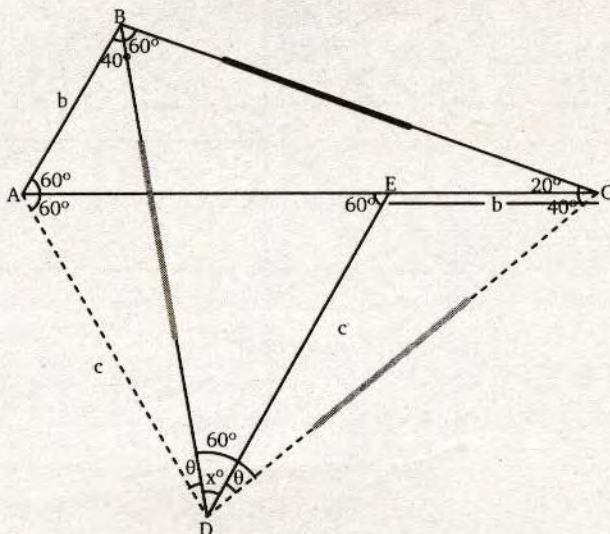
$$CQ = m \quad (\triangle ACQ : \text{Notable de } 30^\circ \text{ y } 60^\circ)$$

Luego $\triangle BHC \cong \triangle CQE$

$$\therefore x = 40$$

Rpta.: B

Resolución 35:



Piden : $m\angle BDE = x$

A partir de los datos se deduce:

- $\triangle ABC : m\angle DBC = 60$
- $\triangle ADC$: equilátero
- $\triangle BDC \cong \triangle ECD$ (L - A - L)
- $AD = DE = c \wedge m\angle ADB = m\angle EDC$

Ahora en "D" se observa:

- $m\angle BDE = 60 = x + \theta = m\angle ADE$
- $\triangle ADE$: equilátero

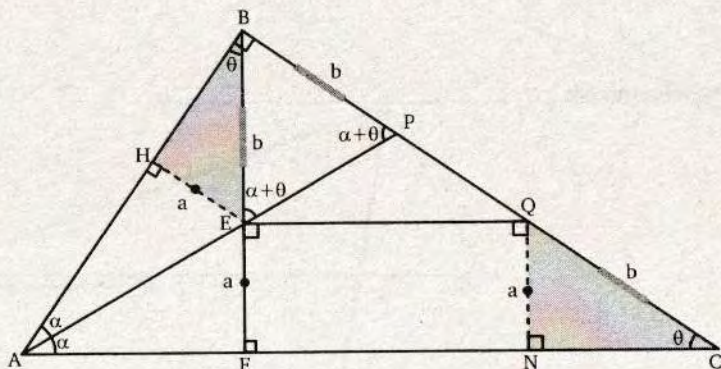
Luego en el $\triangle DEC$:

$$\theta + 40^\circ = 60^\circ \rightarrow \theta = 20^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 36:



Piden: QC en función de BP

- A partir de los datos y del gráfico se deduce:

$$\triangle EBP : \text{isósceles} \rightarrow BE = b$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$EH = EF = a$$

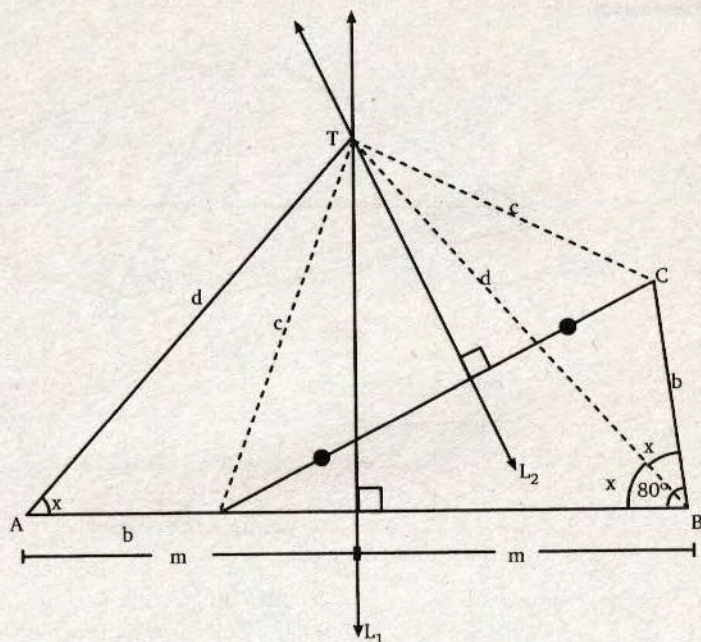
- Se traza $\overline{QN} \perp \overline{AC}$, entonces:

$$\triangle CQN \cong \triangle BEH$$

$$\therefore QC = BP$$

Rpta.: B

Resolución 37:



Piden : x

Dato : $AP = BC$

Por el teorema de la mediatriz:

$$\overline{L_1} : AT = TB = d \wedge m\angle TBA = x$$

$$\overline{L_2} : TP = TC = c$$

Ahora $\triangle ATP \cong \triangle BTC$ (L-L-L)

$$\rightarrow m\angle TBC = m\angle TAP = x$$

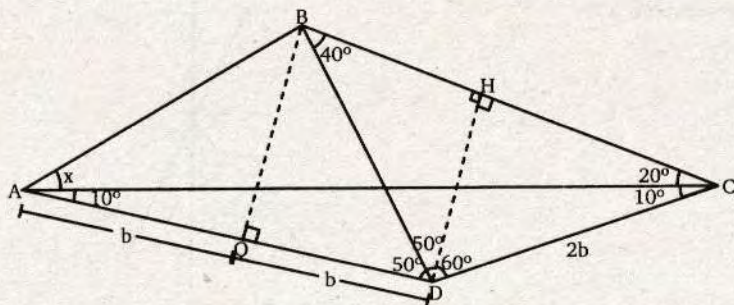
Finalmente en B

$$2x = 80^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 38:



Piden: x

A partir del gráfico:

- $m\angle BDC = 110^\circ$ ($\triangle BDC$)
- $m\angle BDA = 50^\circ$ ($\triangle ADC$)
- $AD = DC$

Ahora se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$, entonces:

- $DC = 2(DH)$...($\triangle DHC$: Not. $30^\circ \wedge 60^\circ$)
- $\overline{DB}$: bisectriz del $\angle ADM$

Luego se traza $\overline{DQ} \perp \overline{AD}$, entonces:

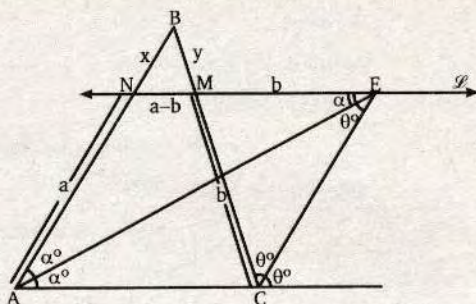
- $DQ = DH = b$...(T. bisectriz)
- $\triangle ABD$: isósceles ($\overline{BQ}$: mediatriz de $\overline{AD}$)

$$\rightarrow x + 10^\circ = 50^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 39:



Piden : $(BN + NM) \min \in \mathbb{Z}$

Dato : $AN - MC = k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Como $\vec{l} \parallel \vec{AC}$; entonces:

- $m\angle AEN = \alpha \wedge EN = AN = a$
- $m\angle MEC = \theta \wedge ME = MC = b$
- $NM = a - b$

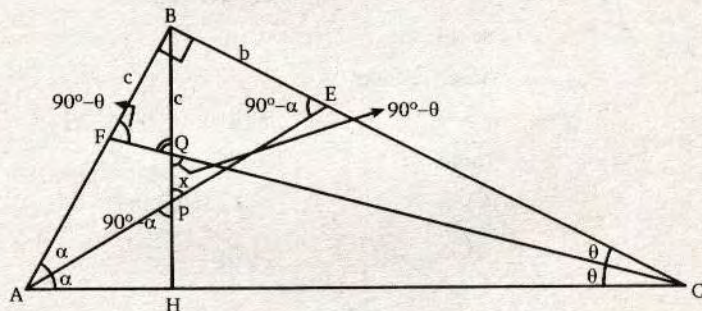
Por existencia en el $\triangle NBM$:

$$\underbrace{a - b}_{k} < x + y$$

$$\therefore (x + y) \min = k + 1$$

Rpta.: C

Resolución 40:



Piden : $PQ = x$

Del dato : $b - c = \ell$

Apartir de los datos iniciales:

$$\bullet m\angle AEB = m\angle APH = 90^\circ - \alpha$$

$\rightarrow \triangle BPE$ es isósceles: $BP = BE = b$

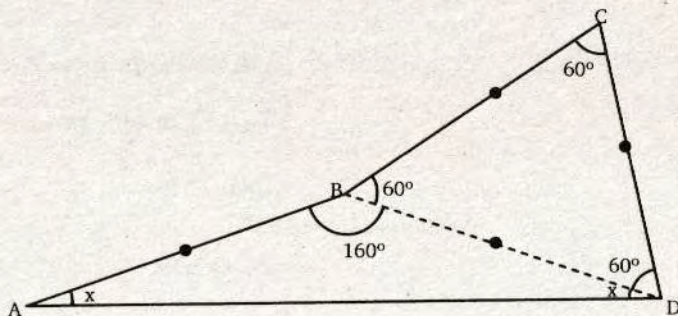
$$\bullet m\angle BFC = m\angle HQC = 90^\circ - \theta$$

$\rightarrow \triangle FBQ$ es isósceles : $BQ = BF = c$

$$\therefore x = b - c$$

Rpta.: D

Resolución 41:



Piden: x

Trazamos $\overline{BD}$, luego:

$\triangle BCD$: equilátero

$$\rightarrow BC = CD = BD = \ell$$

Se observa:

$\triangle ABD$: isósceles

$$m\angle BAD = m\angle BDA = x$$

Luego:

$\triangle ABD$:

$$x + x + 160^\circ = 180^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

Rpta.: C

Piden: x En: $\triangle PQR$

$$2\alpha + 2\theta + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \theta = 40^\circ \quad \dots(I)$$

También:

$$m\angle PMT = 90^\circ + \beta \quad (\angle \text{exterior})$$

$$m\angle RNT = 90^\circ + \alpha \quad (\angle \text{exterior})$$

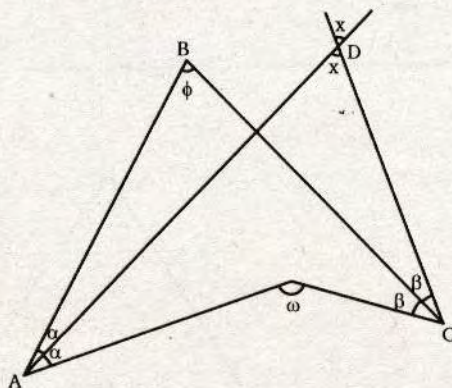
En: $\triangle MQNT$:

$$100 + x = 90 + \beta + 90 + \alpha$$

$$100 + x = \alpha + \beta + 180$$

$$x = \underbrace{\alpha + \beta}_{40^\circ} + 80^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

Rpta.: A**Resolución 44:**

Piden :

$$x = ?$$

Dato :

$$\alpha + \phi - \beta = 28^\circ$$

Se observa:

 $\triangle ADC :$

$$\alpha + x + 2\beta = \omega$$

 $\wedge$ $\triangle ABC :$

$$2\alpha + \phi + \beta = \omega$$

Igualando

$$\alpha + x + 2\beta + \phi + \beta = \omega$$

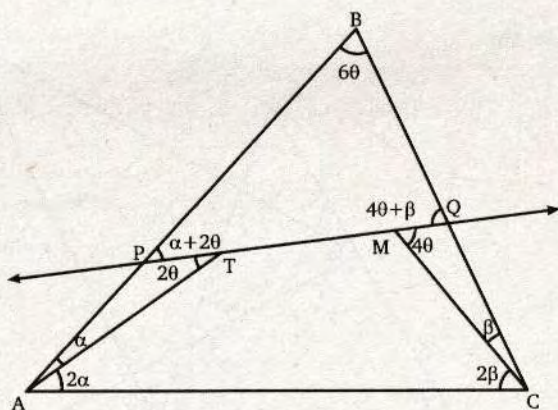
$$x = 2\alpha + \phi + \beta - \alpha - 2\beta$$

$$x = \underbrace{\alpha + \phi - \beta}$$

$$\therefore x = 28^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 45:



Piden : θ

$$m\angle TPB : \alpha + 2\theta \text{ (Prop. } \angle \text{ exterior)}$$

$$m\angle MQB = 40 + \beta \text{ (Prop. } \angle \text{ exterior)}$$

$$\text{En } \triangle PBQ \quad 120 + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 120 \quad \dots(I)$$

$$\text{En } \triangle ABC \quad 3\alpha + 3\beta + 6\theta = 180^\circ$$

$$3(\alpha + \beta) + \theta = 180^\circ \quad \dots(II)$$

Remplazando (I) en (II):

$$3(180 - 120) + 60 = 180$$

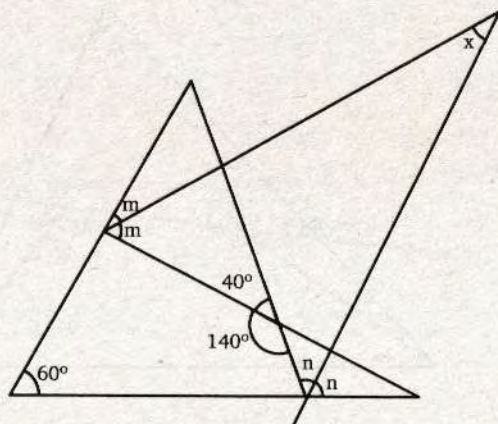
$$540 - 360 + 60 = 180$$

$$360 = 300$$

$$\therefore \theta = 12^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 46:



Piden: x

Se observa: $\triangle : 60 + x = m + n \quad \dots(I)$

También: $\triangle : m + n + x = 140^\circ$

$$m + n = 140^\circ - x \quad \dots(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$60 + x = 140 - x$$

$$2x = 80^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: B

En $\triangle ADE$:

$$\alpha + x = \theta + m \quad \dots(I)$$

En $\triangle CFD$:

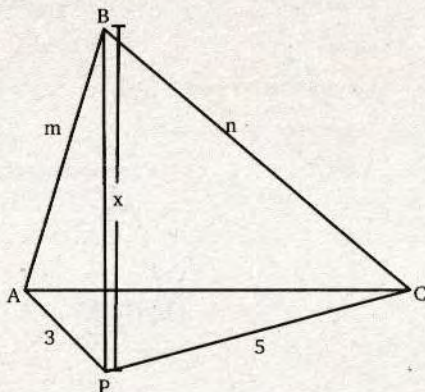
$$x + \theta = \alpha + n \quad \dots(II)$$

Ahora (I) + (II):

$$\cancel{\alpha} + x + x + \cancel{\theta} = \cancel{\theta} + \cancel{\alpha} + m + n$$

$$2x = m + n$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: C**Resolución 49:**

Piden : $BP = x_{\text{máx}}$

Dato : $m + n = 16$

$\triangle ABP$: $x < 3 + m$ (teorema de existencia)

$\triangle BPC$: $x < 5 + n$ (teorema de existencia)

Sumando ambas inecuaciones

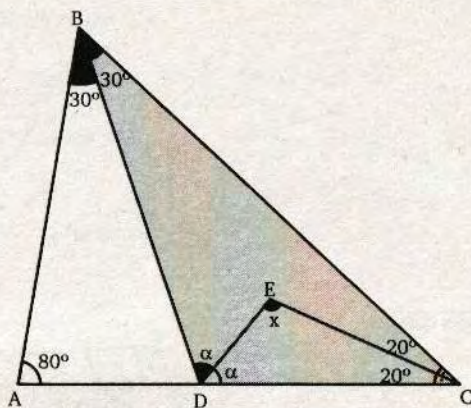
$$2x < 8 + \underbrace{m + n}$$

$$2x < 8 + 16$$

$$\therefore x_{\text{máx}} = 11$$

Rpta.: A

Resolución 50:



Piden : $m\angle DEC = x$

Según los datos: $m\angle ABC = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$

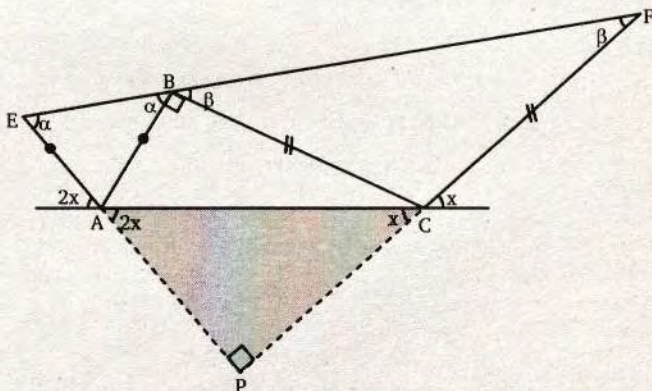
$$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle DBC = 30^\circ$$

$\triangle BCD$ (teorema) $x = 90^\circ + \frac{30^\circ}{2}$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 51:



Piden : x

Según el gráfico $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle EAF$ es rectángulo

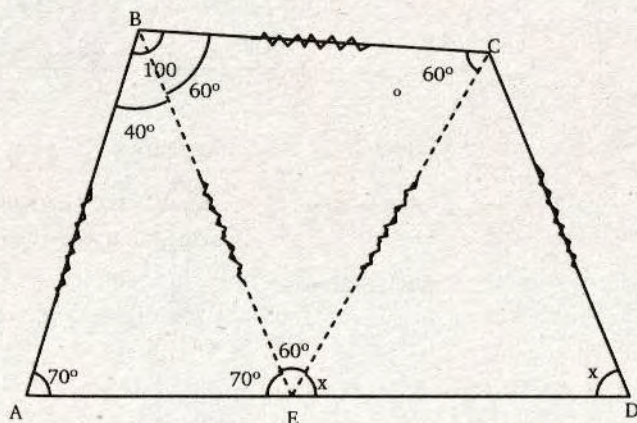
En el $\triangle APC$:

$$2x + x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 52:



Piden x

Trazamos $\overline{BE} \cong \overline{AB}$

$$\Rightarrow m\angle BAE = m\angle BEA = 70^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ABE = 40^\circ \text{ y } m\angle EBC = 60^\circ$$

$\triangle BEC$ es equilátero: $BE = BC = EC$

$\Rightarrow \triangle ECD$ es isósceles: $EC = CD$

$$m\angle CED = m\angle CDE = x$$

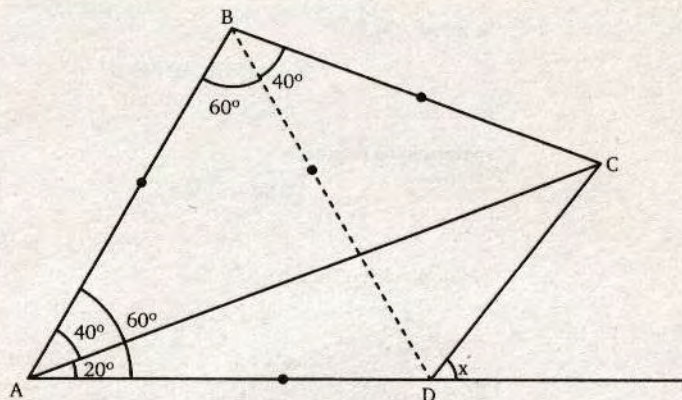
Teorema de las 3 patitas ($BA = BE = BC$):

$$x = \frac{100^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 53:



Piden x

Trazamos $\overline{BD}$ y se forma

El $\triangle ABD$ (equilátero)

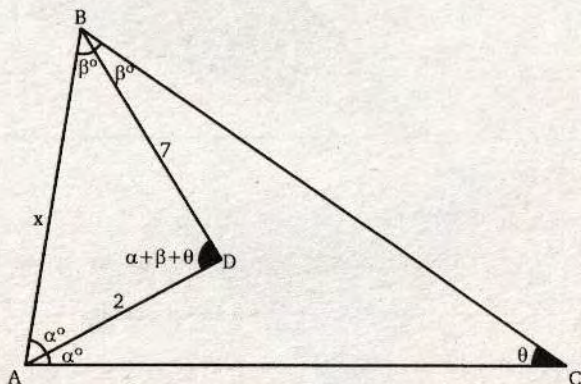
Por el teorema de las 3 patitas ($BA = BD = BC$):

$$m\angle DBC = 2(20^\circ) = 40^\circ \text{ y } x = \frac{60^\circ + 40^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 54:



Piden valores enteros de x

Teorema $\triangle ADB$:

$$m\angle ADB = \alpha + \beta + \theta$$

En el $\triangle ADB$:

• Principio de existencia:

$$7 - 2 < x < 7 + 2$$

$$5 < x < 9 \quad \dots(I)$$

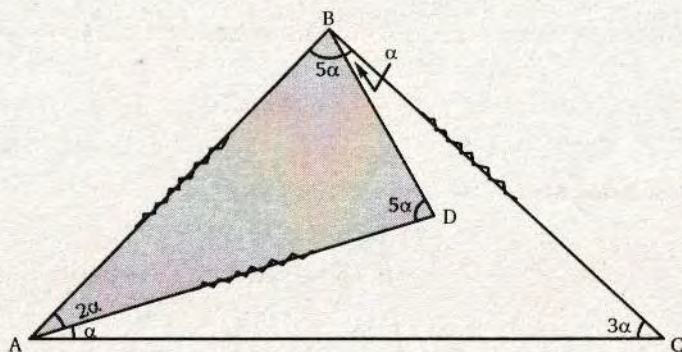
• Principio de correspondencia:

$$\alpha + \beta + \theta > \alpha$$

$$\Rightarrow x > 7 \quad \dots(II)$$

De (I) y (II)

$$7 < x < 9$$

 $\therefore$ El único valor entero de x es 8**Rpta.: D****Resolución 55:**

Piden

" α "Teorema $\triangle CBD$:

$$m\angle BDA = \alpha + 3\alpha + \alpha = 5\alpha$$

 $\Rightarrow \triangle ABD$ es isósceles

$$\Rightarrow AD = AB = BC$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA = 3\alpha$$

ΔABD (Teorema)

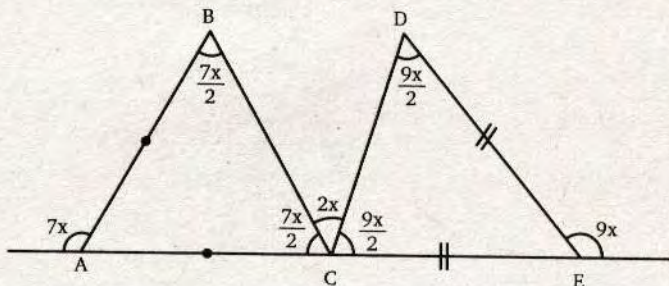
$$2\alpha + 5\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$12\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 15$$

Rpta.: E

Resolución 56:



Piden : x

Completando medidas angulares por medio del teorema del ángulo exterior:

$$m\angle ACB = \frac{7x}{2} \text{ y } m\angle BCD = \frac{9x}{2}$$

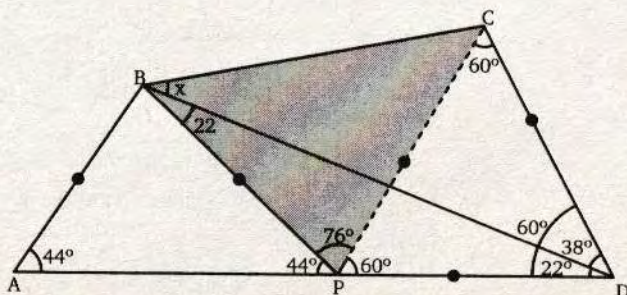
Luego en el punto C:

$$\frac{7x}{2} + 2x + \frac{9x}{2} = 180$$

$$\therefore x = 18$$

Rpta.: B

Resolución 57:



Piden : x

Trazamos $\overline{BP} \cong \overline{AB} \Rightarrow m\angle BPA = 44^\circ$

$$\Rightarrow AB = BP = PD$$

$\Rightarrow \triangle CDP$ es equilátero:

$$m\angle CDP = m\angle DPC = 60$$

$\triangle BPC$ es isósceles:

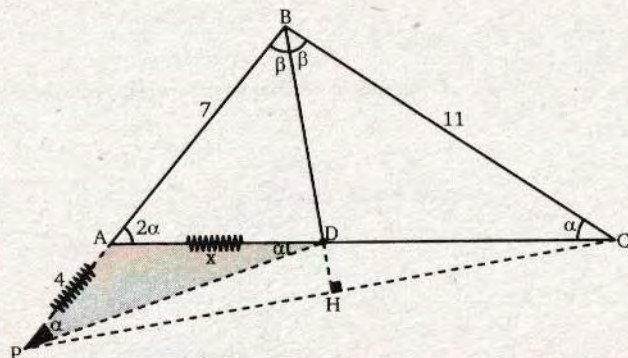
$$m\angle BPC = 76^\circ$$

$$\Rightarrow x + 22^\circ = 90^\circ - \frac{76^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 58:



Piden : $AD = x$

Prolongamos $\overline{BA}$ hasta P; tal que:

$$BP = BC \Rightarrow AP = 4$$

$\triangle PBC$: isósceles:

$\overline{BH}$ es bisectriz; altura y mediatriz

$$\Rightarrow m\angle BPD = m\angle BCD = \alpha$$

$\triangle PAD$ ($\angle$ exterior):

$$m\angle ADP = \alpha$$

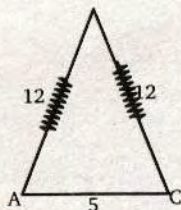
$\Rightarrow \triangle PAD$ es isósceles:

$$PA = AD$$

$$\therefore x = 4$$

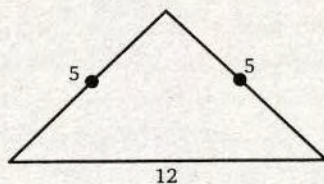
Rpta.: B

Resolución 59:



OBSERVACIÓN

El triángulo



No existe, puesto que no se cumple el principio de existencia:

$$5 - 5 < 12 < 5 + 5$$

$$0 < 12 < 10 \rightarrow (\text{FALSO})$$

Piden: semiperímetro "p"

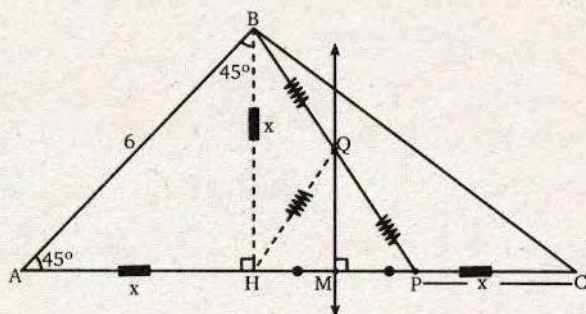
$$2p = 12 + 12 + 5$$

$$2p = 29$$

$$\therefore p = \frac{29}{2} \text{ m}$$

Rpta.: E

Resolución 60:



Piden

$$PC = x$$

Trazamos $\overline{BH} \perp AC$:

$\triangle ABH$ (notable de 45°):

$$AH = BH \text{ (■)}$$

$\triangle BPH$: HQ es mediana relativa a la hipotenusa; entonces:

$$HQ = QB = QP \text{ (■)}$$

Teorema de la mediatriz

$$HM = MP \text{ (●)}$$

Entonces:

$$AH = PC = x$$

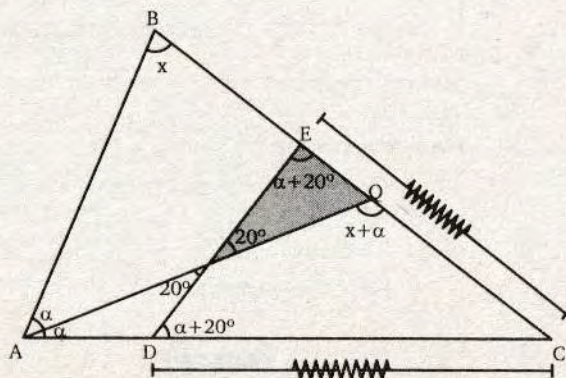
$\triangle ABH$ (notable de 45°)

$$x\sqrt{2} = 6$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 61:



Piden : x

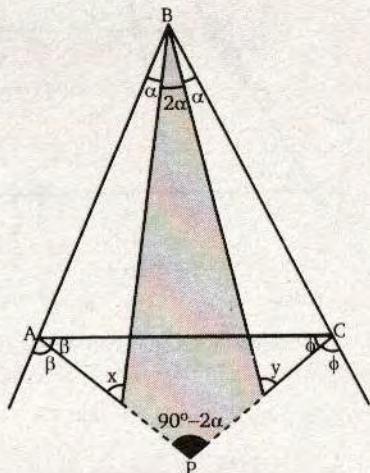
ΔAPD : $m\angle PDC = \alpha + 20^\circ$
 $\Rightarrow m\angle DEC = \alpha + 20^\circ$

ΔABQ : $m\angle AQC = x + \alpha$

ΔPEQ : $x + \alpha = 20^\circ + \alpha + 20^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Rpta.: A

Resolución 62:



Piden $(x + y)$

ΔABC (Teorema del ángulo que forman las bisectrices exteriores)

$$m\angle APC = 90^\circ - \frac{4\alpha}{2} = 90^\circ - 2\alpha$$

Luego por el teorema del "pescadito":

$$x + y = 90^\circ - 2\alpha + 2\alpha$$

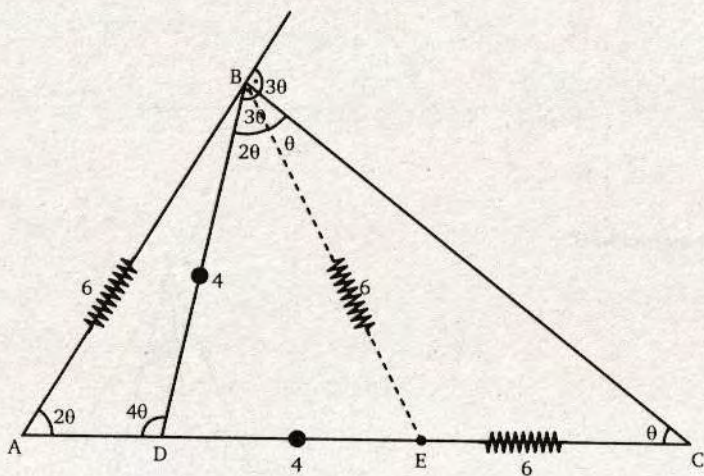
$$\therefore x + y = 90^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 63: Realizando un cambio de variable:

$$\alpha = 2\theta$$

y reemplazamos los datos en la figura:



Piden CD

Trazamos $\overline{BE}$ tal que $m\angle BAE = m\angle BEA = 20$

$$\Rightarrow m\angle DBE = 20 \wedge m\angle EBC = \theta$$

$$\Rightarrow m\angle BCE = \theta$$

Luego

$$\triangle BDE: \quad BD = DE = 4$$

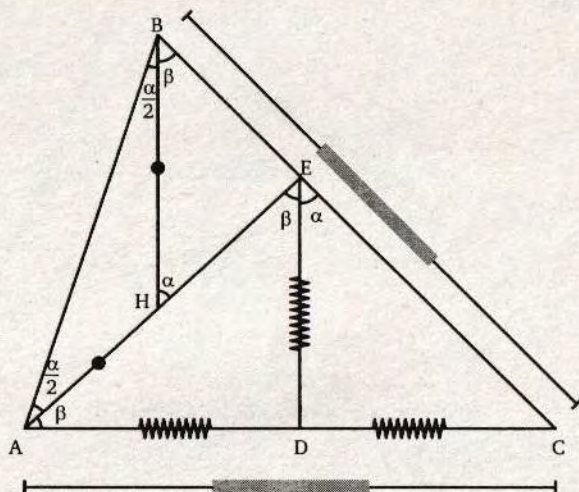
$$\triangle BEC: \quad BE = EC = 6$$

$$\Rightarrow CD = 4 + 6$$

$$\therefore CD = 10$$

Rpta.: D

Resolución 64:



Piden

$m\angle AEC$

$\triangle AHB$ (Isósceles):

$$m\angle HAB = \angle HBA = \frac{\alpha}{2}$$

$\triangle ABE$ (Teorema del $\angle$ exterior)

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = m\angle AED + \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle AED = \beta$$

$\triangle ADE$ es isósceles:

$$AD = DE = \text{wavy line}$$

$\triangle AEC$:

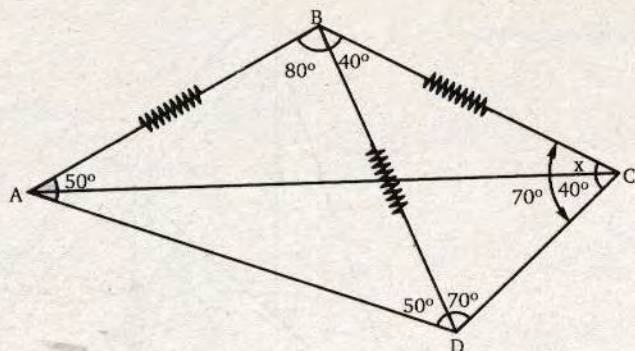
$$ED = DA = DC = \text{wavy line}$$

$\Rightarrow \triangle AEC$ es rectángulo

$$\therefore m\angle AEC = 90^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 65:



Piden : x

Completamos las medidas de los ángulos:

$$\triangle BCD : m\angle BCD = 70^\circ$$

$$\triangle BDA : m\angle BAD = 50^\circ$$

$$\Rightarrow BC = BD = BA = \text{congruent lines}$$

y por el teorema de las tres patitas:

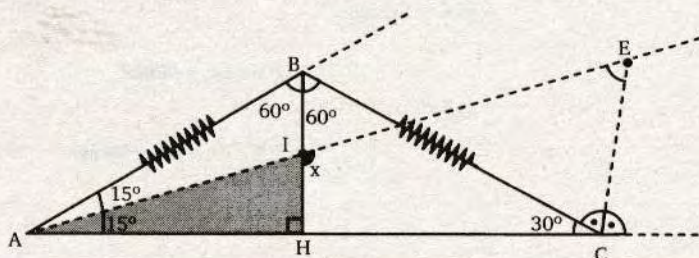
$$m\angle ACD = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$\text{Luego : } x + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 66:



$$\text{Piden : } m\angle EIH = x$$

$$\text{Como } BC = 2BH : \triangle BCH \text{ es notable de } 30^\circ \text{ y } 60^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle BAH = 30^\circ$$

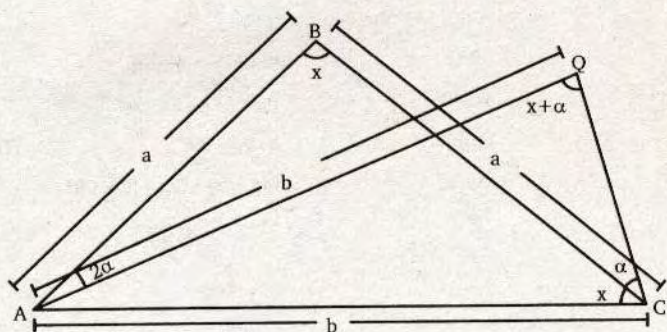
Además se sabe que A; I y E son colineales

$$\Rightarrow \triangle AIH : \quad 15^\circ + 90^\circ = x$$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 67:



Piden : $m\angle ACB = x$

del dato : $AB = BC = a$

$$AQ = AC = b$$

• $m\angle AQC = m\angle ACQ = \alpha + x$

• Luego: en $\triangle ABC$:

$$m\angle ABC = x$$

• Se observa:

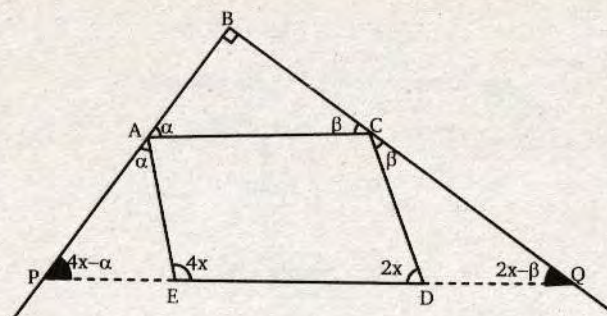
$$\triangle ABC : a = b$$

$\rightarrow \triangle ABC$: equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 68:



Piden :

x

Por el teorema del $\angle$ exterior

$$\triangle PAE : \quad m\angle APE = 4x - \alpha$$

$$\triangle CQD : \quad m\angle CQD = 2x - \alpha$$

$$\triangle ABC : \quad \alpha + \beta = 90^\circ \quad \dots(I)$$

$$\triangle PBQ : \quad (4x - \alpha) + (2x - \beta) = 90^\circ$$

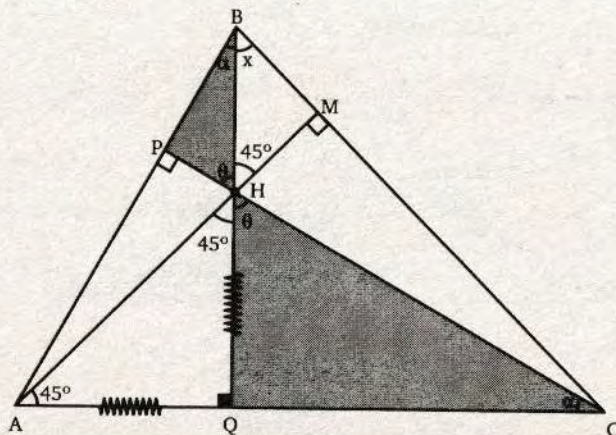
$$6x - \underbrace{(\alpha + \beta)}_{90^\circ} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 6x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 69:



Piden : x

$\triangle PBH$: $\alpha + \theta = 90^\circ$

$\Rightarrow m\angle HQC = 90^\circ$

$\Rightarrow H$ es ortocentro del $\triangle ABC$

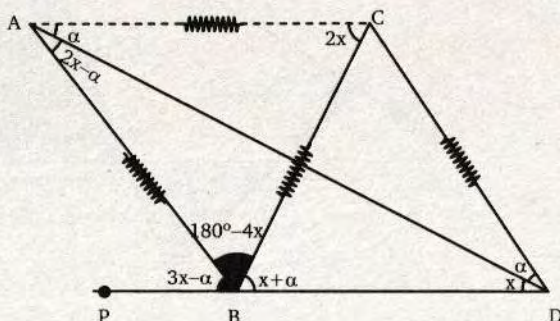
Trazamos la altura $\overline{AM}$

$\triangle BHM$: $x + 45^\circ = 90^\circ$

$\therefore x = 45^\circ$

Rpta.: C

Resolución 70:



Piden : x

$\triangle BCD$ (isósceles):

$m\angle CBD = x + \alpha$

$\triangle BAD$ (Teorema del $\angle$ exterior)

$m\angle ABP = 2x - \alpha + x = 3x - \alpha$

En el punto B:

$m\angle ABC + (3x - \alpha) + (x + \alpha) = 180^\circ$

$m\angle ABC = 180^\circ - 4x$

$\triangle ABC$ (isósceles):

$m\angle BCA = 2x$

$\Rightarrow m\angle DAC = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ACD$ es isósceles:

$AC = CD$ (indicated by double tick marks)

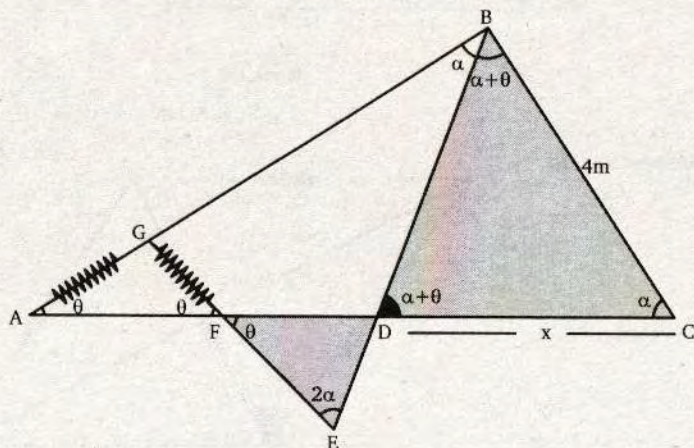
$\Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero:

$$2x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 71:



Piden :

$$CD = x$$

$\triangle AEF$ (isósceles)

$$m\angle GAF = m\angle GFA = \theta$$

$\triangle ABD$ (teorema del $\angle$ exterior)

$$m\angle BDC = \alpha + \theta$$

$\triangleright \triangle EBC$ (teorema de la corbatita)

$$m\angle EBC + \alpha = \theta + 2\alpha$$

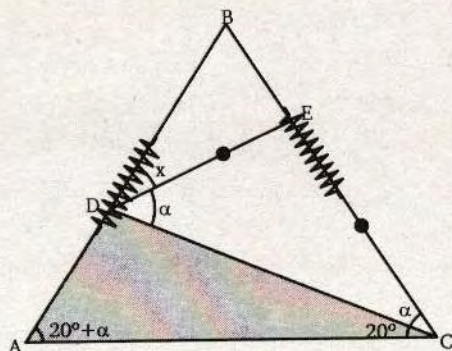
$$\Rightarrow m\angle EBC = \theta + \alpha$$

$\Rightarrow \triangle BCD$ es isósceles

$$\therefore x = 4m$$

Rpta.: B

Resolución 72:



Piden : x

$\triangle EDC$ (isósceles)

$$m\angle EDC = m\angle ECD = \alpha$$

$\triangle ABC$ (isósceles)

$$m\angle BAC = m\angle BCA = 20^\circ + \alpha$$

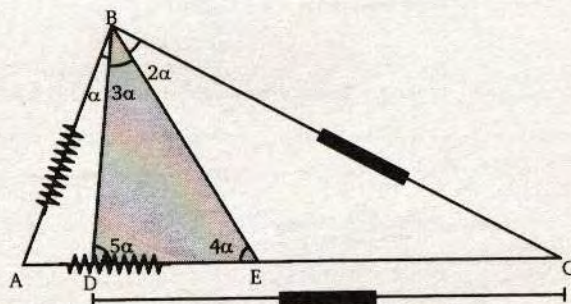
$\triangle ACD$ (teorema del $\angle$ exterior)

$$x + \alpha = 20^\circ + \alpha + 20^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 73:



Piden: α

$\triangle ABE$ (isósceles):

$$m\angle ABE = m\angle AEB = 4\alpha$$

ΔBCD (isósceles):

$$m\angle CBD = m\angle CDB = 5\alpha$$

ΔBDE :

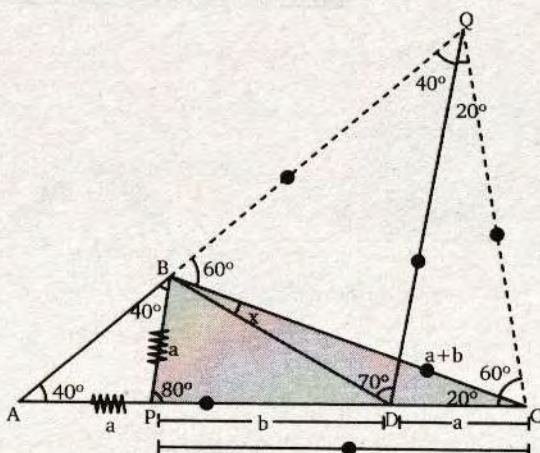
$$3\alpha + 5\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$12\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 74:



Piden : x

Formamos el Δ isósceles CBP :

$$BC = CP$$

prolongamos $\overline{AB}$ y formamos el Δ equilátero BQC

$$\Rightarrow \Delta QCD \cong \Delta CBP \quad (\text{LAL})$$

$$\Rightarrow \Delta BQD \text{ es isósceles } (BQ = QD)$$

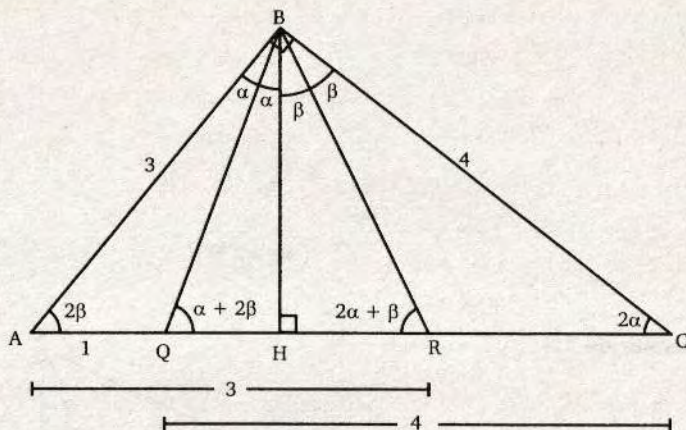
$$\Rightarrow m\angle QBD = m\angle QDB = 70^\circ$$

$$x + 60^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore x = 10$$

Rpta.: B

Resolución 75:



Piden: QR

$\triangle ABC$ (Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow AC = 5$$

Completando las medidas de los ángulos, se deduce que:

$\triangle BAR$ y $\triangle CBQ$ son isósceles.

$$\Rightarrow AR = AB = 3 \text{ y}$$

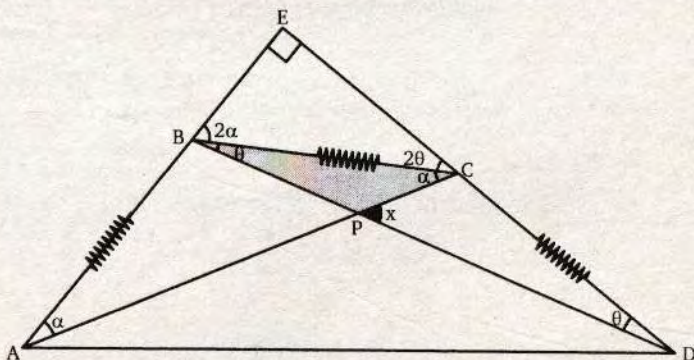
$$CQ = CB = 4$$

$$\Rightarrow AQ = 1$$

$$\therefore QR = 2m$$

Rpta.: A

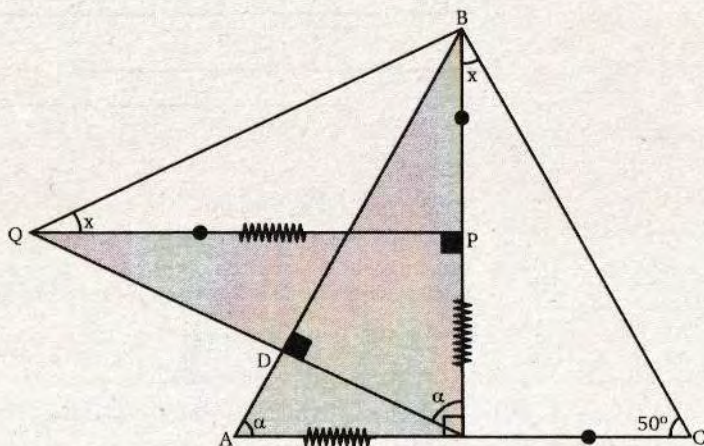
Resolución 76:



Piden : x

$\triangle BEC :$ $2\alpha + 2\theta = 90^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 45^\circ$

$\triangle BPC :$ $x = \alpha + \theta$
 $\therefore x = 45^\circ$

Rpta.: D**Resolución 77:**

Piden : x

$\triangle ABH :$ $m\angle BAH = m\angle BHD = \alpha$

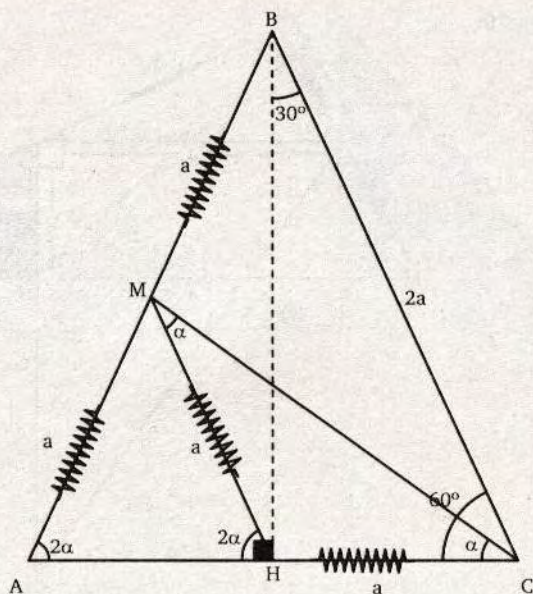
$\triangle AHB \cong \triangle HPQ$ (ALA)
 $\Rightarrow QP = PH$

$\triangle BPQ \cong \triangle CHB$ (ALA)
 $\Rightarrow m\angle HBC = m\angle PQB = x$

$\triangle HBC :$ $x + 50^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Rpta.: C

Resolución 78:



Piden: α

Trazamos $\overline{MH}$ tal que:

$$m\angle MAH = m\angle MHA = 2\alpha$$

$$\Rightarrow MH = HC$$

$\triangle ABH$: se cumple que:

$$HM = MA = MB = a \text{ (}\overline{a}\text{)}$$

$\Rightarrow \triangle ABH$ es rectángulo (recto en H)

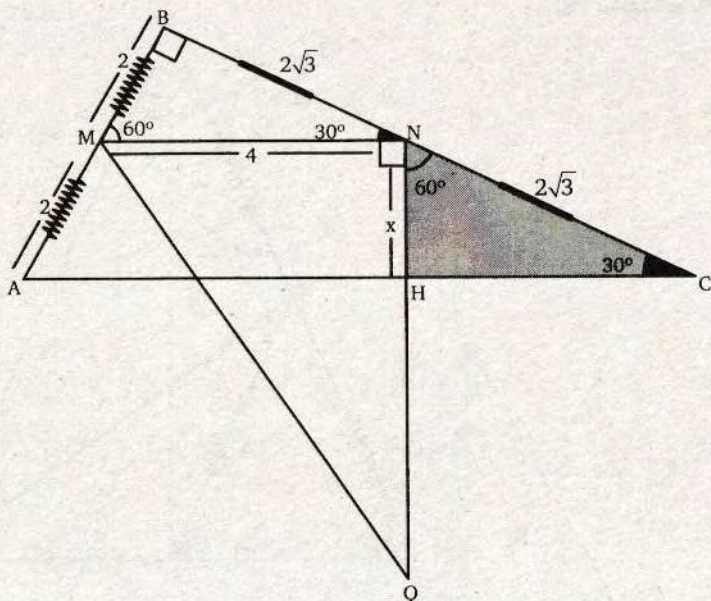
$\triangle ABC$ ($AB = BC = 2a$)

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 79:



Piden

NH = x

 $\overline{MN}$ es base media del $\triangle ABC$:

$$\Rightarrow MN = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow MN = 4$$

$$\text{Ademas } AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{MN}{2}$$

$$\Rightarrow AM = 2$$

 $\triangle MBN$ (notable de 30° y 60°)

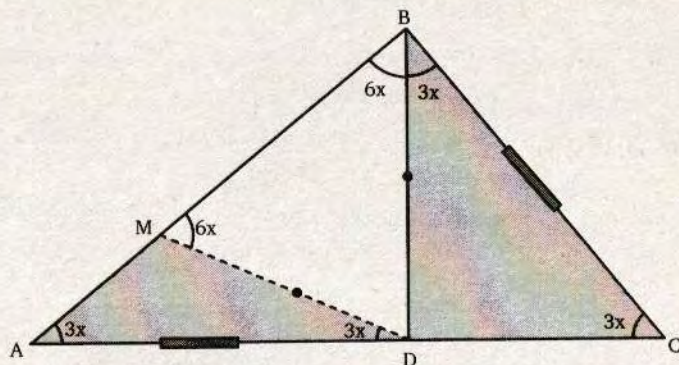
$$\Rightarrow BN = 2\sqrt{3} = NC$$

 $\triangle CNM$ (notable de 30° y 60°)

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

Rpta.: B

Resolución 80:



Piden : x

Trazamos $\overline{DM}$, tal que : $AM = MD$

$$\rightarrow m\angle MAD = m\angle MDA = 3x$$

$$\rightarrow m\angle BMD = 6x$$

$\rightarrow \triangle MDB$: isósceles

Se observa : $\triangle ADM \cong \triangle CBD$ (L - A - L)

$$\rightarrow m\angle MAD = m\angle BCD = 3x$$

Finalmente:

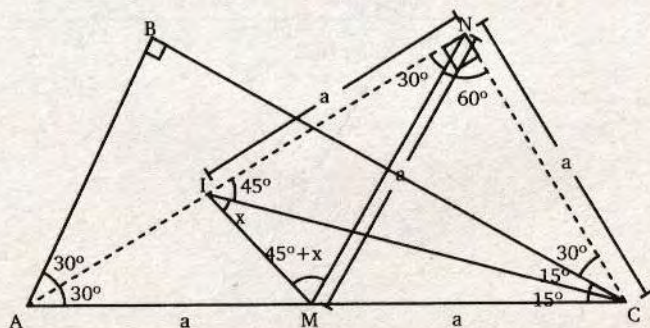
$\triangle ABC$

$$3x + 6x + 3x + 3x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 12^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 81:



Trazamos $\overline{CN}$, tal que:

$$\overline{CN} \perp \overline{AI}$$

$\rightarrow \triangle AMC$ (notable 30° y 60°)

$$AC = 2a, MC = a$$

Se observa:

$\triangle INC$ (notable 45° y 45°)

$$IN = NC = a$$

También:

$\triangle MNC$: equilátero

Luego:

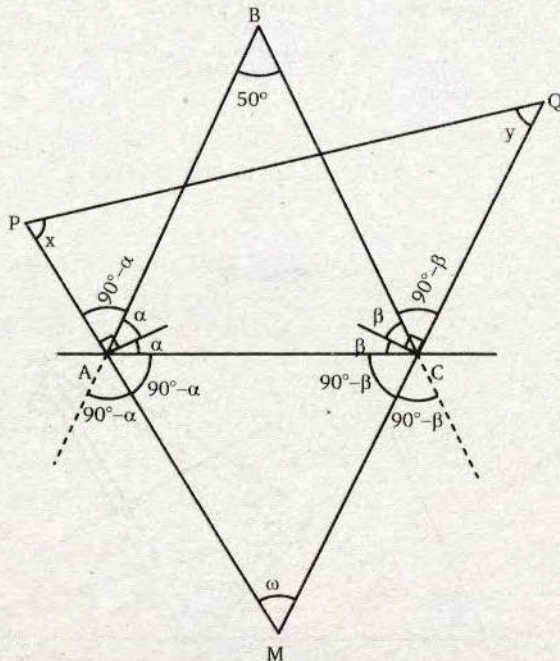
$\triangle INM$: isósceles

$$45^\circ + x + 45^\circ + x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 82:



Piden : $x + y = ?$

Prolongamos $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$, tal que $\overline{PA} \cap \overline{QC} = \{M\}$

Luego : $\omega = 90 - \frac{50}{2}$ (teorema de las bisectrices exteriores)

$$\omega = 65^\circ$$

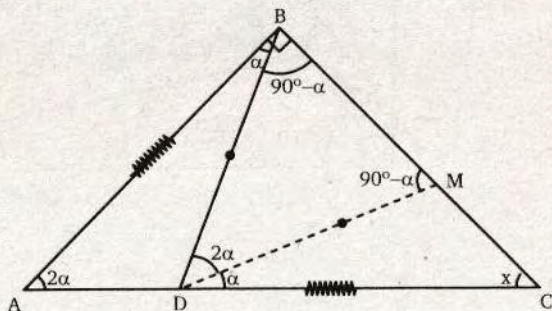
En: $\triangle PQM$ $x + y + \omega = 180^\circ$

$$x + y + 65 = 180^\circ$$

$$\therefore x + y = 115^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 83:



Piden : x

Trazamos $\overline{DM}$, tal que:

$\triangle BDM$: isósceles ($DB = DM$)

Luego:

$\triangle ABD \cong \triangle CDM$ (A - L - A)

$$\rightarrow m\angle BAD = m\angle MCD = 2\alpha$$

$\triangle ABC$:

$$2\alpha + x = 90^\circ$$

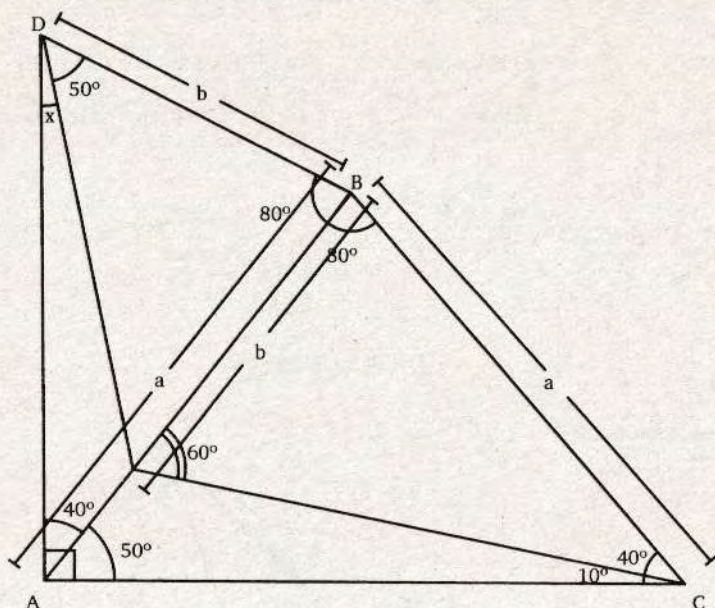
$$2\alpha + 2\alpha = 90^\circ$$

$$2\alpha = 45^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 84:



Piden : $m\angle ADE = x = ?$

Se observa:

$$\triangle BCE \cong \triangle BAD \text{ (A - L - A)}$$

$$\rightarrow EB = DB = b$$

Luego:

$$\triangle DBE: \text{ isósceles } m\angle BDE = m\angle BED = 50^\circ$$

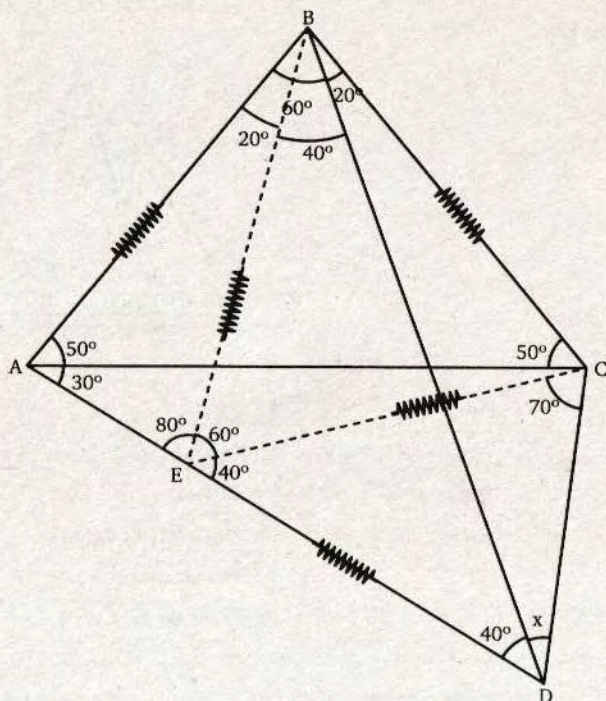
$$\text{Finalmente: } m\angle ADB = m\angle BEC = 60^\circ$$

$$\rightarrow 50^\circ + x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 85:



Piden : x

Trazamos $\overline{BE}$ de modo que:

$\triangle ABE$: isósceles ($AB = BE$)

También:

$\triangle ABC$ = isósceles ($AB = BC$)

Luego:

$\triangle EBC$: equilátero ($EB = BC = EC$)

También:

$\triangle BED$: isósceles

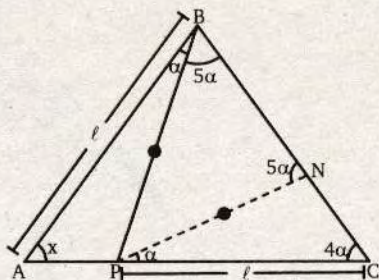
Entonces:

$\triangle EDC$: isósceles $x + 40^\circ = 70^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 86:



Piden : x

Dato : $PC = AB = l$

Trazamos $\overline{PN}$, tal que: $m\angle CPN = \alpha$

Luego : $m\angle PNB = 5\alpha$ ($\angle$ exterior)

$\rightarrow \triangle BPN$: isósceles

$PB = PN = \bullet$

Se observa:

$\triangle ABP \cong \triangle PCN$ (L - A - L)

$\rightarrow m\angle BAP = m\angle PCN$ (L - A - L)

Luego : $x = 4\alpha$

$\triangle ABC$:
 $x + 10\alpha = 180^\circ$
 $\downarrow$
 $4\alpha + 10\alpha = 180^\circ$

$$14\alpha = 180^\circ$$

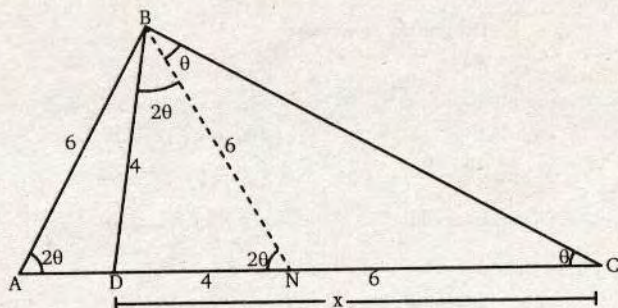
$$\alpha = \frac{90^\circ}{14}$$

$$x = 4\left(\frac{90^\circ}{7}\right)$$

$$\therefore x = \frac{360^\circ}{7}$$

Rpta.: D

Resolución 87:



Piden : $DC = x$

Trazamos la ceviana $\overline{BN}$, tal que $m\angle NBC = m\angle NCB = \theta$

$\rightarrow \triangle BNC$: isósceles ($BN = NC = 6$)

Además:

$m\angle BNA = 2\theta$ ($\angle$ exterior)

$\rightarrow \triangle ABN$: isósceles ($AB = BN = 6$)

También:

$\triangle DBN$: isósceles

($DB = DN = 4$)

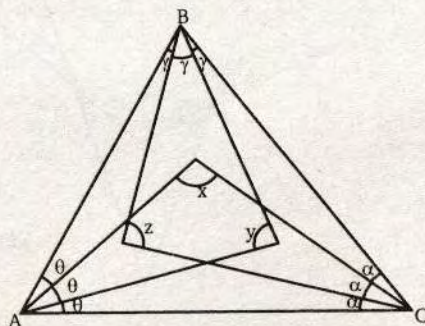
Luego:

$x = 4 + 6$

$\therefore x = 10$

Rpta.: E

Resolución 88:



Piden : $x + y + z$

Del gráfico ,se observa:

$$\triangle: x = \theta + \alpha + 3\gamma$$

$$\triangle: y = \gamma + \theta + 3\alpha \quad \downarrow (+)$$

$$\triangle: z = \gamma + \alpha + 3\theta$$

$$x + y + z = 5(\alpha + \theta + \gamma) \quad \dots(I)$$

En $\triangle ABC$:

$$3(\alpha + \theta + \gamma) = 180^\circ$$

$$\alpha + \theta + \gamma = 60^\circ \quad \dots(II)$$

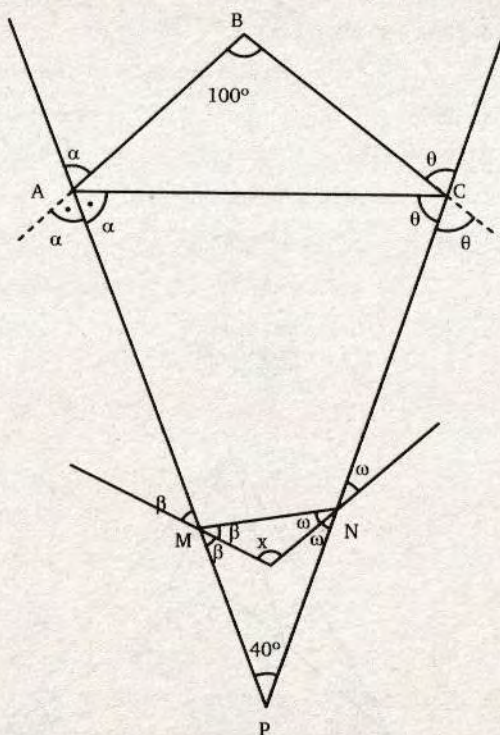
Reemplazando (II) en (I) :

$$x + y + z = 5(60^\circ)$$

$$\therefore x + y + z = 300^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 89:



Piden : $x = ?$

Se observa:

$$\Delta ABC: \quad m\angle APC = 90^\circ - \frac{100^\circ}{2} \text{ (Teorema de bisectrices)}$$

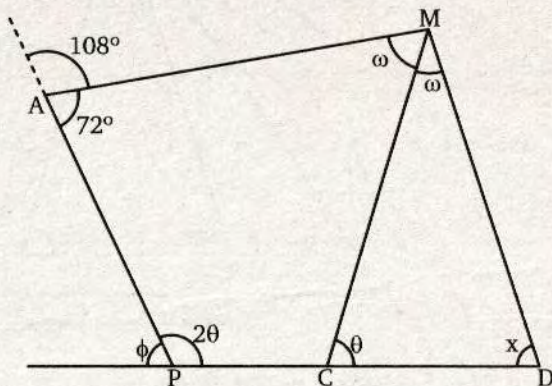
$$m\angle APC = 40^\circ$$

$$\Delta MNP: \quad x = 90 + \frac{40^\circ}{2} \text{ (Teorema de bisectrices)}$$

$$\therefore x = 110^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 90:



Piden : $x = ?$

Dato : $\phi + 2\theta = 180^\circ$

Se observa:

$$\text{En P:} \quad \phi + m\angle APC = 180^\circ \text{ (dato)}$$

$$\rightarrow m\angle APC = 2\theta$$

$$\text{En } \triangle PAMC: \quad 108^\circ + \theta = 2\theta + \omega$$

$$108^\circ = \theta + \omega \quad \dots(I)$$

En $\triangle CMD$:

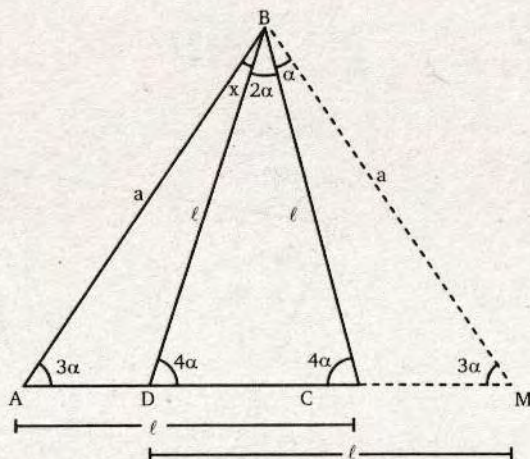
$$x + \theta + \omega = 180^\circ \quad \dots(II)$$

Luego:

(I)+(II)

$$\begin{aligned}
 108 &= 0 + 60 \\
 x + 0 + 60 &= 180 \quad (+) \\
 x + 108 &= 180^\circ
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 72$$

Rpta.: B**Resolución 91:**Piden : $x = ?$ Dato : $AC = DM = \ell$ Trazamos $\overline{AC}$, luego:Trazamos $\overline{BM}$, tal que:

$$AB = BM = a \quad (M \in \overline{AC})$$

 $\rightarrow \triangle ABM$: isósceles

Se observa:

$$\triangle ABC \cong \triangle MBD \quad (L - A - L)$$

$$\rightarrow BD = BC = \ell$$

$$\rightarrow m\angle BCA = m\angle BDM = 4\alpha$$

 $\triangle ABD$:

$$3\alpha + x = 4\alpha \rightarrow x = \alpha$$

$\triangle BCD$:

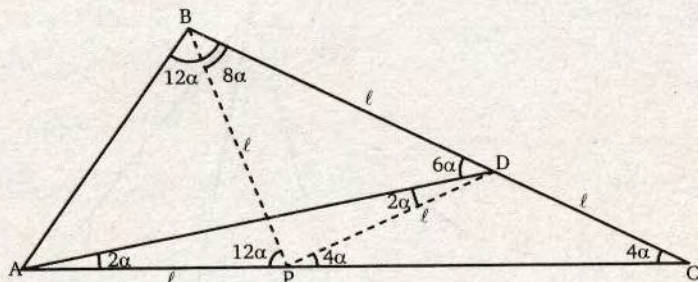
$$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 18^\circ$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 92:



Piden :

α

Dato :

$$AB = DC = l$$

Trazamos $\overline{DP}$ en $\triangle ADC$, tal que:

$$m\angle ADP = 2\alpha$$

→ $\triangle APD$: isósceles ($AP = PD$)

→ $\triangle PDC$: isósceles ($DC = PD$)

→ $AP = PD = DC = l$

Luego:

$$m\angle ADB = 6\alpha \text{ (}\angle \text{ exterior)}$$

$$\triangle ABC \text{ (}\angle \text{ exterior)} \rightarrow m\angle BAQ = 20\alpha + 4\alpha = 24\alpha$$

→ ($\triangle ABP$: isósceles)

$$m\angle ABP = m\angle APB = 12\alpha$$

También:

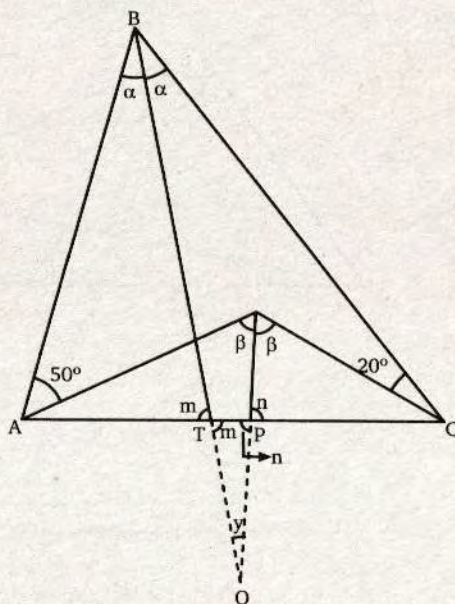
$\triangle PBD$: isósceles

Entonces:

 ΔABP : equilátero

$$12\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 5$$

Rpta.: A**Resolución 93:**

Piden :

$$m + n = ?$$

Construimos la figura para aplicar el teorema de bisectrices:

$$y = \frac{50^\circ - 20^\circ}{2}$$

$$y = 15^\circ$$

 ΔTPQ :

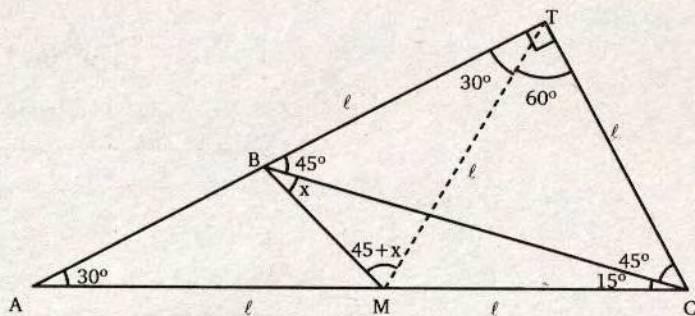
$$m + n + y = 180^\circ$$

$$m + n + 15 = 180^\circ$$

$$\therefore m + n = 165^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 94:



Piden : $m\angle MBC = x$

Dato : $AM = MC = \ell$

Prolongamos $\overline{AB}$ hasta T , tal que $\overline{AT} \perp \overline{CT}$

Luego: $m\angle TBC = 45^\circ$ ($\angle$ exterior)

→ $\triangle BTC$: (notable de 45° y 45°)

$$BT = TC = \ell$$

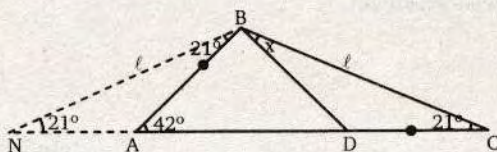
$$\Delta \text{MTC: equilátero} \rightarrow \text{MT} = \text{TC} = \text{MC} = \ell$$
$$\Delta \text{ BTM: isósceles: } \text{BT} = \text{TM} = \ell$$

$$\rightarrow m\angle TMB = 45^\circ + x$$

Luego: $45^\circ + x + 45^\circ + x + 30^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 95:Piden : x

Dato : $AB = DC = \bullet$

Trazamos la ceviana exterior $\overline{BN}$, tal que:

$$m\angle BNA = 21^\circ$$

→ $\triangle NBC$: isósceles

$$NB = BC = \ell$$

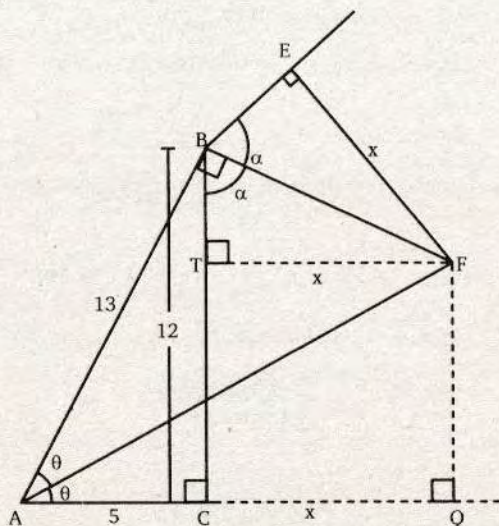
Entonces

$$\triangle NBA \cong \triangle BCD \text{ (L - A - L)}$$

$$\rightarrow m\angle BNA = m\angle DBC$$

$$\therefore 21^{\circ} = x$$

Rpta.: C

Resolución 96:

Piden : $EF = x$

Se observa : $EF = FT = x$ (Teorema de la bisectriz)

Luego: $\triangle ACB$: (Conocido de 5; 12 y 13)

$$\rightarrow AC = 5$$

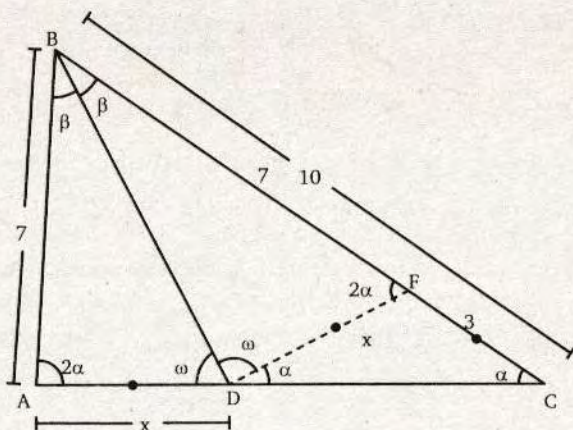
Ademas: $BA = FQ = 13$ (Teorema de la bisectriz)

$$\rightarrow x + 5 = 13$$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: C

Resolución 97:



Piden : x

Trazamos $\overline{DF}$, tal que $DF = FC$

$$\rightarrow m\angle DFB = 2\alpha (\angle \text{ exterior})$$

Se observa: $\triangle ABD \cong \triangle BDF$ (A - L - A)

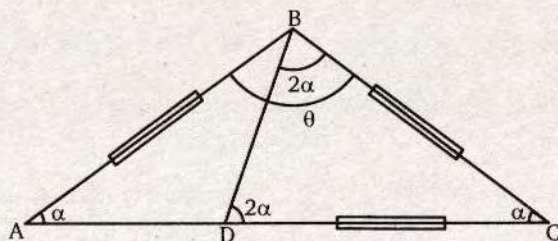
$$\rightarrow AB = BF = 7$$

$$\rightarrow FC = 3$$

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: A

Resolución 98:



Piden : $m\angle BAC = \alpha$

Dato : $2\alpha + \theta = 180^\circ$

ΔABC :

$$m\angle C + \alpha + \theta = 180^\circ$$

$$\rightarrow m\angle C = \alpha$$

Luego:

ΔABC : isósceles $(AB = BC)$

$$m\angle CBD = m\angle BDC = 2\alpha$$

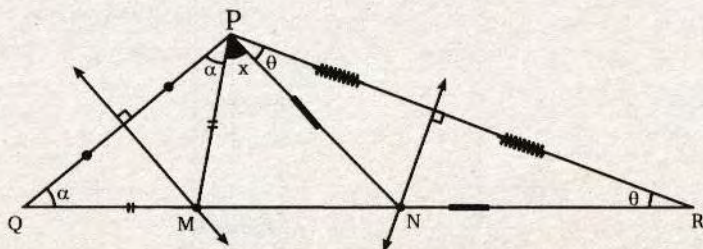
Entonces:

$$\Delta BDC : 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 36^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 99:



Piden : $m\angle NPM = x$

Dato : $m\angle QPR = 130^\circ$

$$\Rightarrow x + \alpha + \theta = 130^\circ \quad \dots(I)$$

$\triangle MPN$: $x + 2\alpha + 2\theta = 180^\circ \quad \dots(II)$

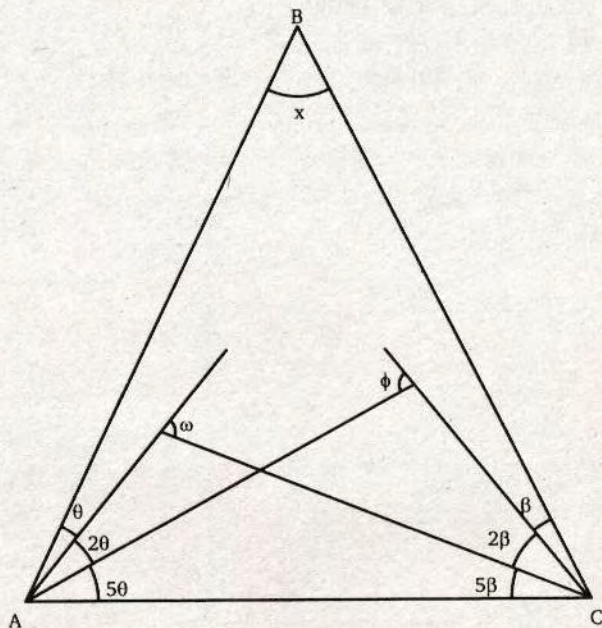
Luego $2 \times (I) - (II)$:

$$x = 2(130^\circ) - 180^\circ$$

$$\therefore x = 80^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 100:



Piden : x

Dato : $\omega + \phi = 6x$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 02

Del gráfico:

$$\omega = 7\theta + 5\beta \quad \dots(I) (\angle \text{ exterior})$$

$$\phi = 7\beta + 5\theta \quad \dots(II) (\angle \text{ exterior})$$

(I) + (II):

$$\omega + \phi = 12(\theta + \beta)$$

$$6x = 12(\theta + \beta)$$

$$\frac{x}{2} = \theta + \beta \quad \dots(III)$$

En $\triangle ABC$:

$$x + 8\theta + 8\beta = 180$$

$$x + 8(\theta + \beta) = 180 \quad \dots(IV)$$

Reemplazando:

$$(III) \text{ en } (IV): \quad x + 8\left(\frac{x}{2}\right) = 180^\circ$$

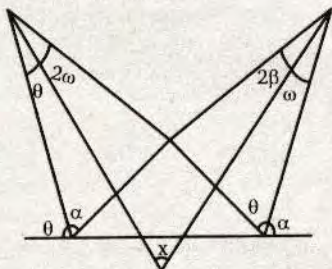
$$\therefore x = 36^\circ$$

Rpta.: C



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor de x :



- A) 45° B) 60° C) 75°
D) 50° E) 40°

2. En el triángulo ABC:

$m\angle BAC = 2(m\angle BCA) = 4\alpha$, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $m\angle DBC = 3\alpha$ y $BC = AB + AD$. Calcular el valor de α .

- A) 20° B) 25° C) 15°
D) 10° E) 18°

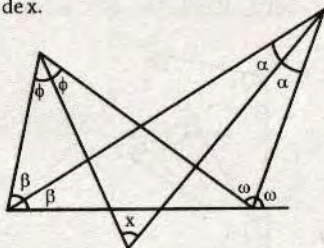
3. Una recta corta a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC en los puntos P y Q respectivamente, de modo que $m\angle A = m\angle PQB$, si $PQ = 6$ y $QC = 4$ ¿Cuántos valores enteros puede tomar PC?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 7

4. En un triángulo equilátero ABC exterior y relativo a BC se ubica el punto F, tal que $m\angle BFC > 90^\circ$, $BF = 20$ y $FC = 21$. Calcular el menor valor entero que puede tomar el perímetro del triángulo equilátero.

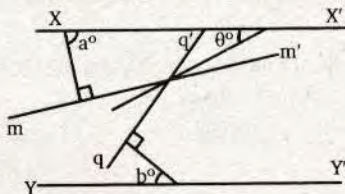
- A) 52 B) 64 C) 79
D) 88 E) 121

5. De la figura mostrada, calcular el valor de x .



- A) $(\alpha + \beta)/2$ B) $\alpha + 2\beta$
C) $\alpha + \beta$
D) $90 - (\alpha + \beta)/2$ E) $180 - (\alpha + \beta)$

6. En la figura mostrada las rectas XX' e YY' son paralelas. Si la suma de los ángulos a y b es 76, calcular la medida del ángulo e formado por XX' con la bisectriz del ángulo que determinan las rectas mm' y qq' .

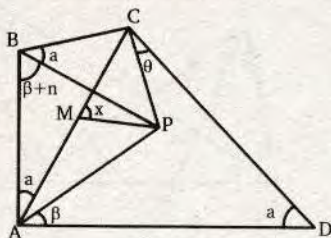


- A) 28° B) 42° C) 36°
D) 52° E) 14°

7. En un triángulo escaleno sus lados miden 2, 3 y $\sqrt{x-2}$. ¿Cuántos valores enteros positivos puede tomar x ?

- A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

8. Del gráfico mostrado:
 $a + \beta + \theta + n = 125$, $BC = CP$ y
 $MP \parallel AD$. calcular el valor de x .



- A) 45 B) 55 C) 65
 D) 50 E) 40
9. En el interior del triángulo ABC se ubica el punto P tal que: $m\angle A = 5(m\angle ABP)$, $m\angle PBC = 7(m\angle PCA)$. Si $m\angle ABP = m\angle PCA$ y $AB = PC$, calcular $m\angle PCB$.
- A) 20° B) 30° C) 40°
 D) 35° E) 60°
10. En un triángulo ABC obtuso en B, $m\angle A = 2m\angle C$. $AB = 4$ y $BC = x$ ($x \in \mathbb{N}$). Calcule x .
- A) 5 B) 6 C) 7
 D) 8 E) 9
11. Se tiene un triángulo ABC, en la región exterior relativa a BC se ubica el punto "Q" tal que $AB = BQ$. $m\angle BQA = 56^\circ$, $m\angle QAC = 30^\circ$ y $m\angle QBC = 17^\circ$. Calcular la $m\angle BCQ$.
- A) 20° B) 30° C) 35°
 D) 40° E) 36°

12. En un triángulo ABC. se ubican en los lados AB y BC los puntos P y Q respectivamente tal que $m\angle BAQ = 20^\circ$, $m\angle QAC = 60^\circ$, $m\angle BCP = 30^\circ$ y $m\angle PCA = 50^\circ$, calcule $m\angle PQA$.

A) 25° B) 30° C) 35°
 D) 50° E) 45°

13. En un triángulo ABC, se trazan las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{AN}$ tal que $BM = 12$ y $AN = 15$, entonces la mayor longitud entera del lado AC es:

A) 25 B) 26 C) 26
 D) 28 E) 29

14. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana interior $\overline{AN}$; calcular el ángulo entre dichas líneas si $B = AB$ y $m\angle BAC - m\angle BCA = 40^\circ$.

A) 50° B) 70° C) 55°
 D) 80° E) 30°

15. En un triángulo ABC, se trazan la mediana y la altura $\overline{AM}$ y $\overline{BH}$ respectivamente tal que $m\angle ABH = 45^\circ$ y $m\angle BCA = 30^\circ$. Halle $m\angle AMH$.

A) 10° B) 12° C) 15°
 D) 18° E) 20°

16. En el triángulo ABC, $m\angle A = 2m\angle C$. se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, tal que $DC = x$ y $ab = y$. Indique la relación correcta:

A) $x > y$ B) $y < x < 2y$
 C) $0 < \frac{x}{2} < 2y$
 D) $0 < x < 2y$ E) $0 < x < 3y$

17. En un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), las bisectrices interior del $\angle A$ y exterior del $\angle C$ se intersectan en el punto E. Si $AB = 8$, entonces la menor longitud entera del segmento AE es:

A) 1 B) 12 C) 9
D) 15 E) 8

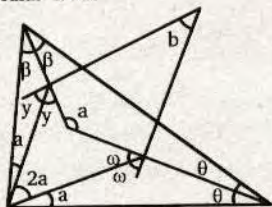
18. ABC es un triángulo recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. interior al triángulo BHC se ubica el punto P tal que $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo HAB y $\overline{BP}$ es bisectriz del ángulo CBH. Si $BP = 3$ y $AP = 6$, entonces AB es igual a:

A) $3\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $\sqrt{56}$ E) $\sqrt{65}$

19. Se tiene un triángulo ABC tal que $m\angle A = 3m\angle C$, $AB = 3$ y el ángulo ABC es obtuso. Calcular BC, si se sabe que es un valor entero.

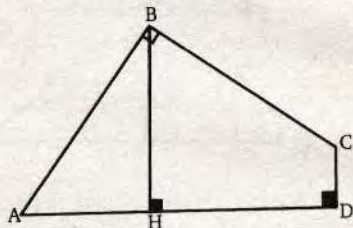
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

20. Calcular "a+b"



A) 150° B) 180° C) 160°
D) 120° E) 200°

21. En la siguiente figura: $AB = BC$, $BH = 9$ y $CD = 3$. Calcular "AD".



A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 17

22. Se tiene un triángulo ABC y se traza la mediana $\overline{BM}$; si $AB = 8$, $BC = 5$ y $m\angle MBC = 53^\circ$, calcular $m\angle ABM$.

A) 16° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 37°

23. En la región interior de un triángulo ABC se ubica en el punto P tal que: $AP = BC$ y $m\angle BAP = m\angle BCP$. $m\angle BAP + m\angle PBC = 80^\circ$. Calcular la $m\angle ABP$

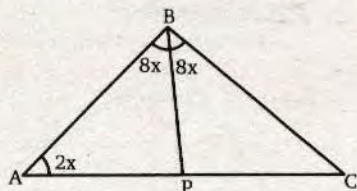
A) 40 B) 160 C) 50
D) 100 E) 80

24. ABC es un triángulo en el cual se traza la ceviana $\overline{BD}$, tal que $AB = CD$, $m\angle A = 40^\circ$ y $m\angle CBD = 70^\circ$. Calcular la $m\angle ABD$

A) 20° B) 15° C) 10°
D) 30° E) 40°

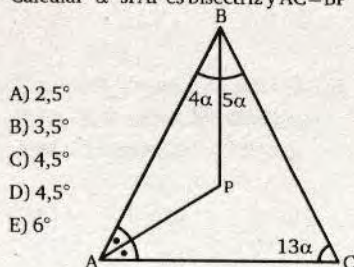
BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 02

25. Si $AP=BC$, calcular el valor de x .



- A) 18° B) 5° C) 15°
D) 20° E) 10°

26. Calcular " α " si $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz y $AC=BP$



- A) $2,5^\circ$
B) $3,5^\circ$
C) $4,5^\circ$
D) $4,5^\circ$
E) 6°

27. En un triángulo ABC, se trazan la mediana $\overline{CM}$ y la altura $\overline{BH}$, $\overline{BH} \cap \overline{CM} = \{Q\}$. Si $BH = CM$. Calcule $m\angle BQC$.

- A) 105° B) 120° C) 135°
D) 145° E) 150°

28. En un triángulo ABC se trazan la mediana $\overline{BD}$ y la ceviana $\overline{CE}$ ($E \in \overline{AB}$), las que se interceptan en el punto F de manera que $m\angle BFC = 75^\circ$ y $m\angle ACE = 30^\circ$, entonces $m\angle AFE$ es:

- A) $12,5^\circ$ B) 12° C) $22,5^\circ$
D) 30° E) 45°

29. Dado el triángulo ABC, $m\angle B = 150$ y la $m\angle C = 10$, la diferencia del vértice C a la bisectriz que parte de A es 5 cm. La medida de AB(en cm)es:

- A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

30. Se tiene el triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BF}$ y la bisectriz $\overline{AQ}$, del ángulo BAC ($Q \in \overline{BC}$), $\overline{AQ} \cap \overline{BF} = \{R\}$. Se traza $\overline{RP}$ paralelo a $\overline{CA}$ ($P \in \overline{QC}$). Si $BR=3(RF)$ y $PC=K(BF)$, el valor de k es:

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

31. En un triángulo ABC, recto en B, $m\angle A = 15^\circ$, $AC = 24$ u. Halle la longitud de la bisectriz $\overline{BF}$ del ángulo ABC(en u)

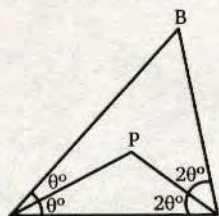
- A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 7
D) 8 E) 12

32. En un triángulo ABC, $AB = 4u$, $BC = 7u$, halle el máximo valor entero de la longitud de la mediana relativa del lado $\overline{AC}$ (en u)

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

33. Si $AP = BC$, calcular el valor de θ .

- A) 10
B) 15
C) 18
D) 20
E) 22,5



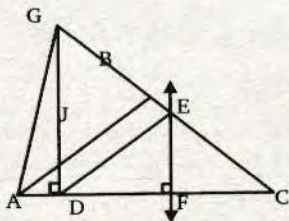
34. En un triángulo ABC: $m\angle A = 2m\angle C$, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que $AH = a$ y $HC = b$. Calcular " AB "

- A) $b - 2a$ B) $\frac{(b-a)}{2}$ C) $a + b$
D) $b - a$ E) $2b - a$

35. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{BQ}$ ($Q \in \overline{AC}$) y se ubican los puntos P en $\overline{AB}$, R en $\overline{BC}$ y M punto medio de $\overline{QC}$, de modo que: $m\angle APQ = m\angle MRC$. Si $PQ = 8 \mu$, la longitud de $\overline{RM}$ es:

- A) 5μ B) 2μ C) 4μ
D) 6μ E) 3μ

36. En la figura $\overline{EF}$ es la mediatriz de $\overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $AJ = 20$ cm. Calcular BE (en cm)



- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

37. En un triángulo ABC se trazan la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que:

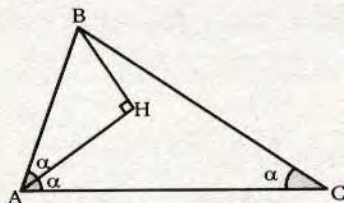
$m\angle DBC = 90^\circ$; $DC = 2(AD)$ y
 $m\angle ABD = m\angle C$. Calcular $m\angle C$.

- A) 30° B) 36° C) $26,5^\circ$
D) $22,5^\circ$ E) 42°

38. En un triángulo isósceles ABC, $AB = BC$, $m\angle ABC = 20^\circ$, se traza la mediatriz $\overline{L}$ de $\overline{AB}$ y F un punto exterior al triángulo tal que: $F \in \overline{L}$. Si $m\angle FCB = 30^\circ$. Entonces la $m\angle CBF$ es:

- A) 20° B) 25° C) 30°
D) 32° E) 36°

39. Del gráfico mostrado, calcular BC, si $AH = 6$.

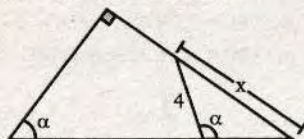


- A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 12
D) 18 E) $12\sqrt{3}$

40. En un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AB}$ corta a $\overline{AC}$ en N y la mediatriz de $\overline{NC}$ corta $\overline{BC}$ en P, si $m\angle A = 2m\angle C$ y $AN = 7$, calcular el mínimo valor entero de BP

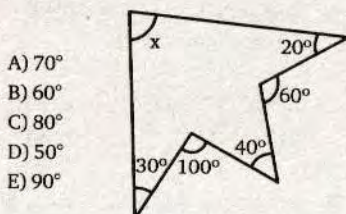
- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 13

41. En la figura, calcular el máximo valor entero que puede tomar "x".



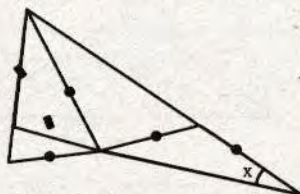
- A) 6 B) 7 C) 8
D) 5 E) 9

42. En la figura, calcular "x".



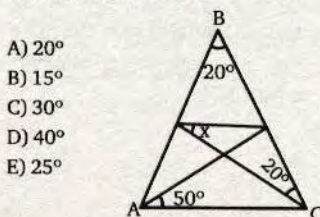
- A) 70°
B) 60°
C) 80°
D) 50°
E) 90°

43. En la figura, calcular "x" si
 $AQ = QB = QC = CP$ y $BR = RQ$



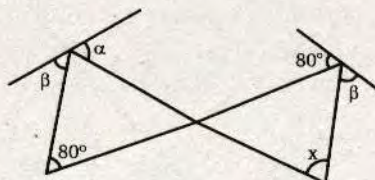
- A) 15 B) 18 C) 20
D) 12 E) 10

44. Calcular "x", si $AB = BC$



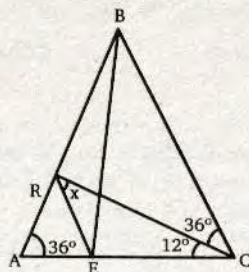
- A) 20°
B) 15°
C) 30°
D) 40°
E) 25°

45. En la figura, calcular "x".



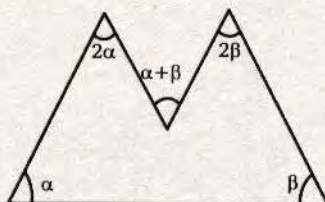
- A) 80° B) 70° C) 40°
D) 20° E) 60°

46. Calcular "x", si $BC = CE$



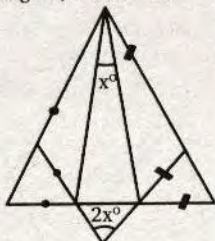
- A) 24° B) 4° C) 15°
D) 30° E) 20°

47. En La figura, calcular $(\alpha + \beta)$.



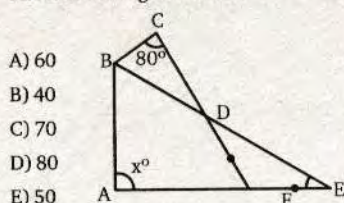
- A) 60° B) 90° C) 120°
D) 150° E) 45°

48. En la figura, calcular "x".



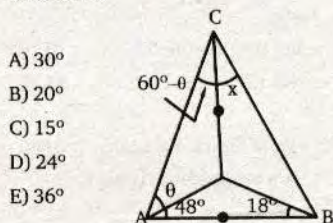
- A) 10 B) 12 C) 18
D) 20 E) 15

49. En la figura calcular "x", si $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC.



- A) 60
B) 40
C) 70
D) 80
E) 50

50. Calcular "x"



- A) 30°
B) 20°
C) 15°
D) 24°
E) 36°

51. En un triángulo rectángulo ABC, D es un punto de $\overline{AC}$ y L es un punto de $\overline{BD}$. Si: $AB = AD$ y $m\widehat{BCL} = m\widehat{LCD}$, halle $m\widehat{LDC}$.

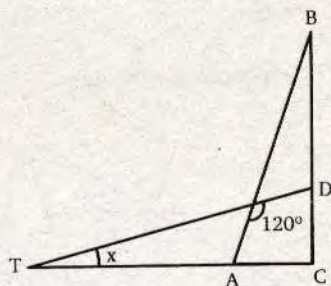
- A) 50° B) 35° C) 90°
D) 40° E) 45°

52. En un triángulo ABC, D es un punto exterior relativo a $\overline{AB}$.

Si $AD = AB$, $AC = AB + BD$ y
 $m\widehat{ABC} = 2m\widehat{ACB} = 2m\widehat{BAD}$,
halle la medida del ángulo ACB.

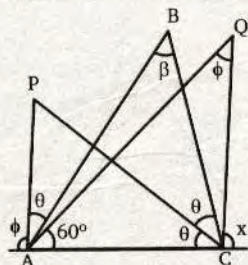
- A) 40° B) 45° C) 60°
D) 30° E) 36°

53. En la figura $AB = BC$ y $TC = TD$. Halle x.



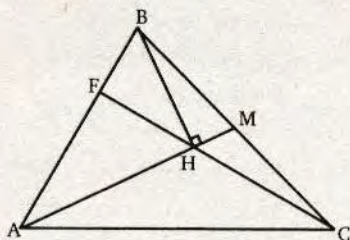
- A) 30° B) 42° C) 20°
D) 40° E) 36°

54. En la figura: $\beta + \theta = 50^\circ$. Halle x.



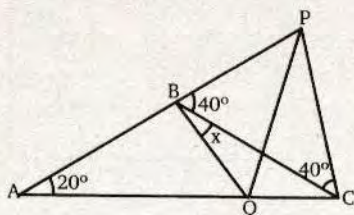
- A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 135°

55. En la figura, AM mediana y $AB=BC$.
Halle $m\angle BHF$



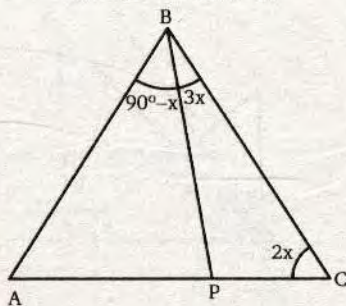
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

56. En la figura, $BP = QC$. Halle x .



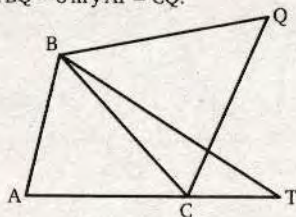
- A) 30° B) 36° C) 40°
D) 15° E) 20°

57. En la figura, $AP = BC$. Halle x .



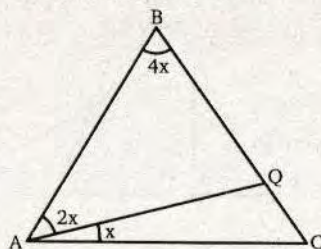
- A) 12° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 17°

58. En la figura, el triángulo ABC es equilateral y $m\angle BAC = m\angle QCT$.
Si $BQ = 8$ m y $AT = CQ$.



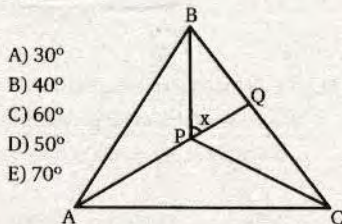
- A) 12 m B) 10 m C) 8 m
D) 6 m E) 7 m

59. En la figura $AQ=BC$. Halle x .



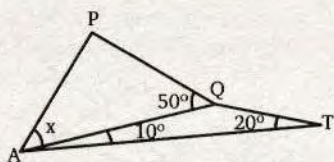
- A) 10° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 24°

60. En la figura, los triángulos ABP y CPQ son congruentes. Halle x



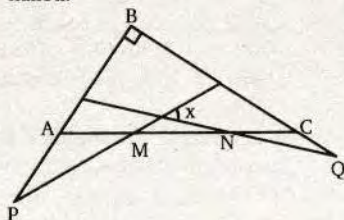
- A) 30°
B) 40°
C) 60°
D) 50°
E) 70°

61. En la figura, $PQ = QT$. Halle x .



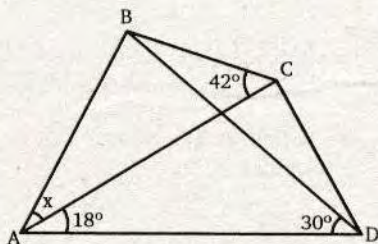
- A) 10° B) 60° C) 30°
D) 40° E) 15°

62. En la figura, $AP = AM$ y $CQ = CN$. halle x .



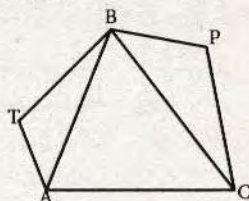
- A) 40° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 50°

63. En la figura, $BC = CD$. Halle x .



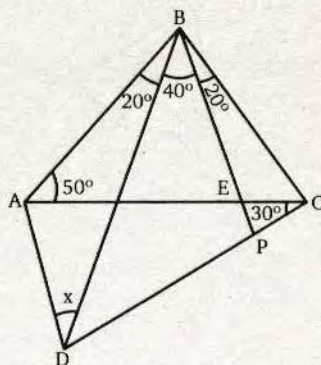
- A) 30° B) 20° C) 18°
D) 12° E) 35°

64. En la figura, $TB = BP = 3$ m y $PC = 2AT = 4$ m. Halle el mayor valor entero de $AB + BC$.



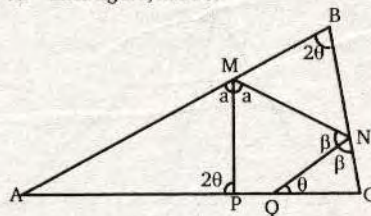
- A) 10 m
B) 12 m
C) 11 m
D) 13 m
E) 9 m

65. En la figura. Halle X .



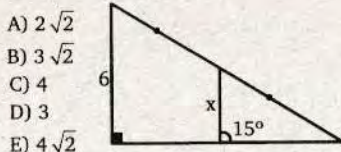
- A) 45° B) 50° C) 60°
D) 20° E) 30°

66. En la figura, halle θ .



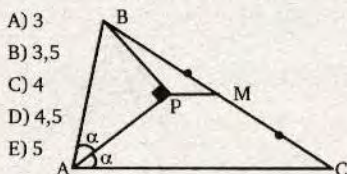
- A) 30° B) 50° C) 45°
D) 35° E) 40°

67. Calcular "x"



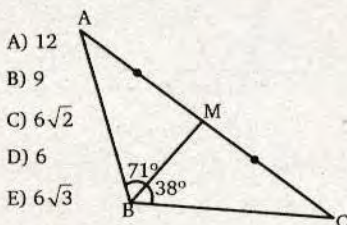
- A) $2\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{2}$
C) 4
D) 3
E) $4\sqrt{2}$

68. En la figura, $AB = 7$, $AC = 15$ y "M" es punto medio de $\overline{BC}$. Calcular PM.



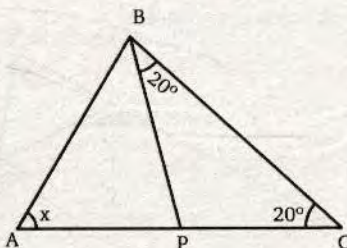
- A) 3
B) 3,5
C) 4
D) 4,5
E) 5

69. En el gráfico $BC = 12$. Calcular BM



- A) 12
B) 9
C) $6\sqrt{2}$
D) 6
E) $6\sqrt{3}$

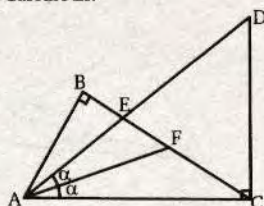
70. En la figura, $AP = BC$. Halle x.



- A) 45° B) 53° C) 30°
D) 60° E) 37°

71. En el gráfico $ED = DC$, si $AB = 6$ y $BE = 4$. Calcule EF.

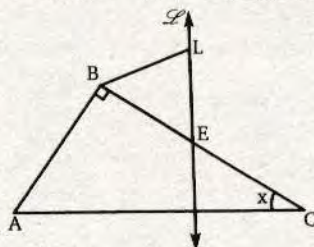
- A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3



72. En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices exteriores en los vértices A y C, que se intersectan en D.
Si: $m\angle ADC = 2(m\angle ABC)$,
calcule $m\angle ADC$.

- A) 30° B) 50° C) 45°
D) 35° E) 40°

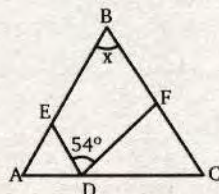
73. En el gráfico. $\mathcal{L}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$, además, $AC = 2(BL) = 2(EL)$. Calcule x



- A) 15° B) 30° C) $37^\circ/2$
D) $53^\circ/2$ E) $45^\circ/2$

74. En la figura, $AE = AD$ y $CD = CF$, calcule x.

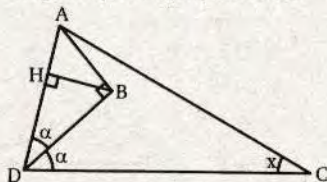
- A) 54°
B) 66°
C) 68°
D) 72°
E) 76°



75. En la región exterior relativo a BC de un triángulo ABC se ubica el punto E, si $m\angle ABC = m\angle EBC = 60^\circ$ y $m\angle BEA = 5 (m\angle EAC) = 50^\circ$ calcule $m\angle BCE$

A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 55°

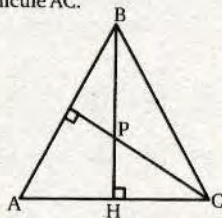
76. Del gráfico, $AC = 4(BH)$. Calcule x.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 14° E) $127^\circ/2$

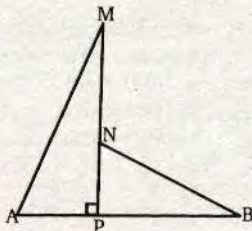
77. En el gráfico $AB = PC$, si $BP = 5$ cm y $PH = 3$ cm, calcule AC.

A) 10 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 16 cm
E) 11 cm

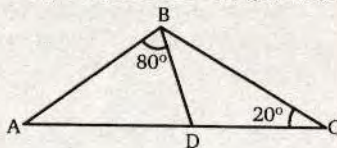


78. Sean los triángulos rectángulos, que se muestran, congruentes; $MN = 3$ y $NP = 2$. Calcule AB

A) 9
B) 5
C) 8
D) 6
E) 7

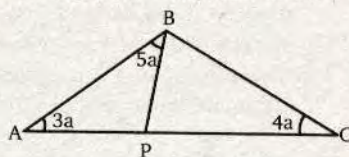


79. Del gráfico, si $BC = AD = 7$ cm, calcule AB



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

80. En la figura, $AP = BC$, hallar $m\angle BAC$



A) 45° B) 30° C) 27°
D) 36° E) 18°

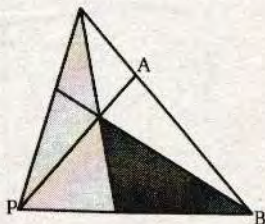
81. En la prolongación de AC, de un triángulo ABC, recto en B se ubica el punto R, tal que $AC = 2(CR)$ y

$m\angle BRA = 30^\circ$. Calcule: $\frac{m\angle BAC}{m\angle RBC}$

A) 1,5 B) 2 C) 0,5
D) 1 E) 1,2

82. Si los triángulos que limitan a las regiones sombreadas son congruentes y $AB = 3$, calcule PB.

A) 4
B) 3
C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{2}$



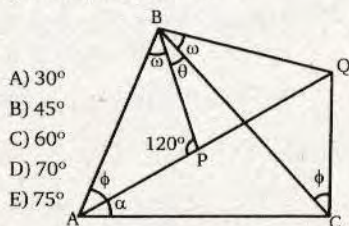
83. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BL}$ y la altura $\overline{BH}$, H en $\overline{AL}$, si $AH=HL$ y $LC = 2(BH)$, calcule $m\angle BCA$.

A) 8° B) $37^\circ/2$ C) $45^\circ/2$
D) $53^\circ/2$ E) 15°

84. Interiormente a un triángulo ABC se ubica el punto P que pertenece a la mediatriz de $\overline{AC}$, luego en $\overline{AC}$ se ubica el punto Q de modo que $AB=QC$ y el triángulo BPQ es isósceles de base BQ, calcule la $m\angle PCQ$ si la medida del ángulo exterior del vértice A es 100° .

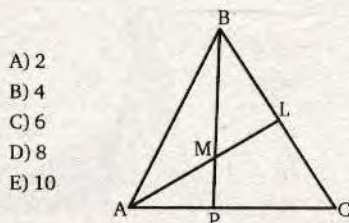
A) 20° B) 30° C) 25°
D) 35° E) 40°

85. Sean los triángulos ABP y CBQ congruentes, calcule $\theta + \alpha$.



A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 70°
E) 75°

86. Del gráfico que se muestra, calcule BM si $MP=2$, $AM=ML$ y $BL=LC$.



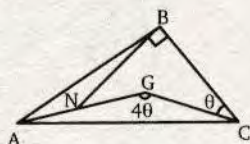
A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

87. En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se ubica M en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que la mediatriz de $\overline{AM}$ biseca a $\overline{BC}$. Calcule: $\frac{AC}{CM}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $3/2$ E) $5/2$

88. En el gráfico, N es punto medio de $\overline{AG}$, si $AG=GC=8$ y $AC=12$, calcule BN.

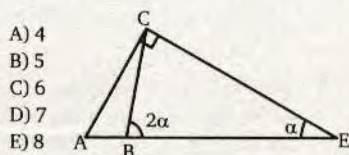
A) $4\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{13}$
C) 10
D) $5\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{10}$



89. En un triángulo ABC, recto en B, se trazan las cevianas interiores $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ ($N \in \overline{CM}$), tal que trisecan al ángulo BAC. Si $MN=3$ y $CN=5$. Calcule $m\angle BAM$.

A) 15° B) 16° C) $53^\circ/2$
D) $37^\circ/2$ E) 30°

90. Del gráfico, $AB=1$ y $BC=3$. Calcule BE



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

91. Sobre $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, recto en B, se ubica D, tal que: $m\angle BAD = m\angle ACD$ y la mediatriz de $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AC}$ en M, tal que: $3(AM) = 5(CM)$. Calcule: $m\angle ACB$.

A) 30° B) 37° C) $37^\circ/2$
D) 53° E) $53^\circ/2$

92. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$, tal que su mediatriz contiene a B y, además, interseca en R y S a $\overline{AM}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Calcule: $\frac{BR}{RS}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5/2

93. En un triángulo ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AC}$, la bisectriz interior $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son concurrentes en D. Halle: $\frac{BD}{DC}$.

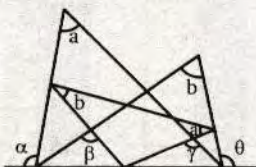
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

94. En un triángulo ABC, recto en B, se ubican los puntos P y M en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $AM = MC$, se traza $\overline{PH} \perp \overline{AC}$, H en $\overline{MC}$, si $m\angle BAC = 2(m\angle PMH)$ y $MH = 5$, calcule AB.

A) 75 B) 10 C) 12,5
D) 11 E) 8

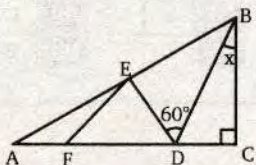
95. Del gráfico, calcule: $\alpha + \beta + \theta + \gamma$.

A) 180°
B) 270°
C) 360°
D) 300°
E) 390°

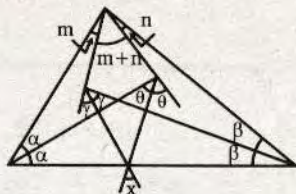


96. En el gráfico, $AF = FE = ED = DB$; calcule x.

A) 10°
B) 11°
C) 12°
D) 13°
E) 14°

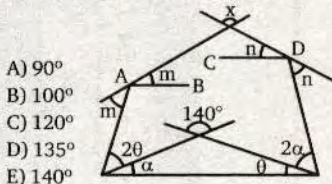


97. Del gráfico mostrado, calcule x.



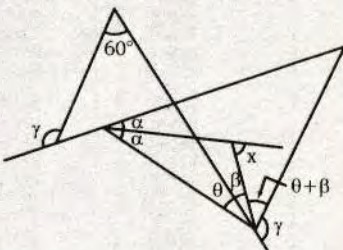
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

98. En el gráfico $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, calcule x.



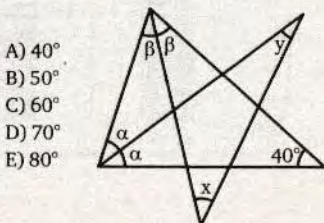
A) 90°
B) 100°
C) 120°
D) 135°
E) 140°

99. Del gráfico mostrado, calcule x.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

100. Del gráfico, calcule x + y.



A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

**CLAVES**

1	B
2	C
3	E
4	C
5	D
6	D
7	E
8	B
9	C
10	C
11	E
12	B
13	B
14	B
15	C
16	A
17	D
18	A
19	C
20	B
21	D
22	B
23	E
24	D
25	E

26	C
27	E
28	E
29	D
30	C
31	D
32	A
33	D
34	D
35	A
36	E
37	A
38	A
39	C
40	B
41	B
42	A
43	B
44	C
45	A
46	D
47	B
48	C
49	D
50	D

51	E
52	E
53	C
54	B
55	C
56	A
57	C
58	C
59	C
60	C
61	C
62	D
63	A
64	C
65	E
66	C
67	B
68	C
69	A
70	C
71	C
72	D
73	E
74	D
75	B

76	A
77	E
78	B
79	B
80	D
81	E
82	E
83	C
84	E
85	C
86	C
87	B
88	B
89	D
90	B
91	E
92	C
93	E
94	B
95	C
96	A
97	C
98	C
99	C
100	B

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNI

UNI - 2001 - I

PROBLEMA 01: Sea ABCD un cuadrilátero, donde $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; $P \in \overline{BC}$, $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo BAD; suponga también que $\overline{DC}$ es bisectriz exterior al ángulo D del triángulo ABD. Si $\overline{BD} - \overline{AB} = 3$, determine la longitud de $\overline{PC}$.

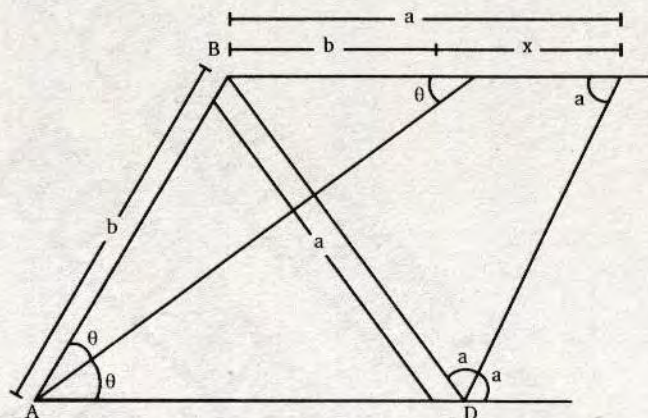
A) 3

B) 6

C) 9

D) 12

E) 15

Resolución:

Datos :

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

$$a - b = 3$$

Piden $PC = x$:

$$\triangle DBC \text{ isosceles} \rightarrow BC = BD = a$$

$$\triangle ABP \text{ isosceles} \rightarrow BP = AB = b$$

Del gráfico :

$$x = a - b$$

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: A

PROBLEMA 02: En un triángulo obtusángulo ABC (obtusó en C), $AB=m$ y $AC=n$. La circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{BC}$ determina sobre este lado el punto de tangencia P y la circunferencia inscrita es tangente a dicho lado en el punto Q. Calcule PQ

A) $\frac{m+n}{4}$

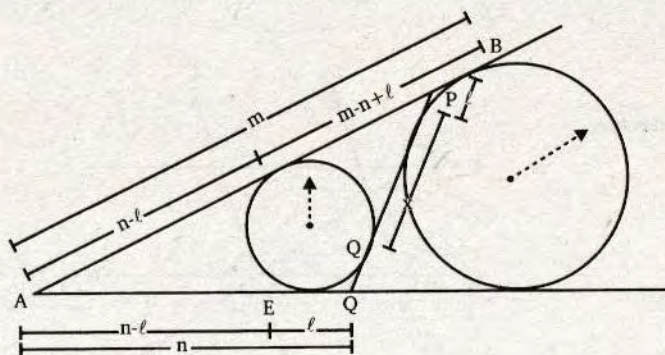
B) $\frac{m-n}{2}$

C) $\frac{m+2n}{4}$

D) $2m-3n$

E) $m-n$

Resolución:



Piden PQ.

Sea $PQ = x$

Propiedad $CF = BP = \ell$

Luego por la propiedad de las tangentes

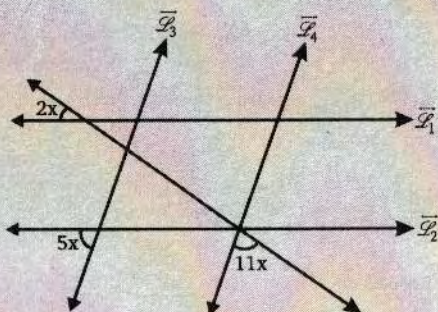
$$x + \ell = m - n + \ell$$

$$\therefore x = m - n$$

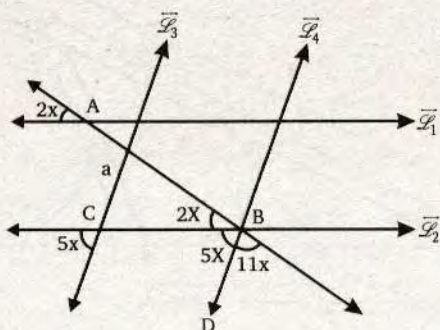
Rpta.: E

PROBLEMA 03: En la figura $\overline{\mathcal{L}}_1 // \overline{\mathcal{L}}_2$ y $\overline{\mathcal{L}}_3 // \overline{\mathcal{L}}_4$, el valor numero de $3x^\circ - 12^\circ$ es:

- A) 15°
 B) 16°
 C) 17°
 D) 18°
 E) 19°



Resolución:



Piden $3x - 12^\circ$

$$\overline{\mathcal{L}}_1 // \overline{\mathcal{L}}_2 : m\angle ABC = 2x$$

$$\overline{\mathcal{L}}_3 // \overline{\mathcal{L}}_4 : m\angle CBD = 5x$$

$$\text{En B: } 2x + 5x + 11x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ$$

$$\rightarrow x = 10^\circ$$

$$\therefore 3x - 12^\circ = 18^\circ$$

Rpta.: D

PROBLEMA 04: En el triángulo ABC, $D \in AB$ tal que $AD=9$ y $DB=6$. Se trazan los segmentos DF paralelo a BC (F en AC) y DE que intercepta a BC en G (E en la prolongación de AC), de modo que $4(AF)=3(FE)$. Si $DG=8$, calcule GE.

A) 10

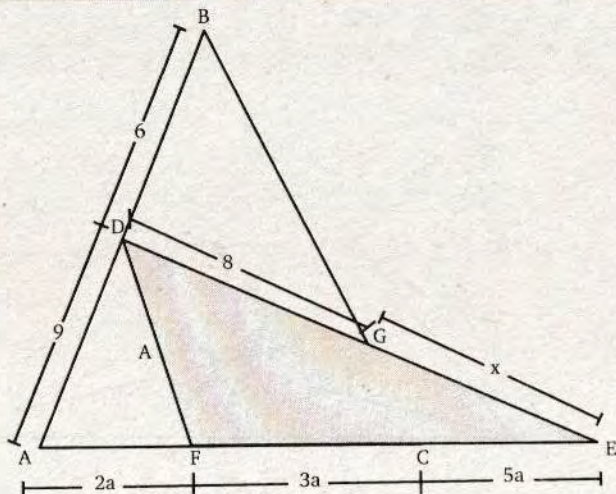
B) 6

C) 8

D) 7

E) $16/7$

Resolución:



Piden :

$$GE = x$$

Dato :

$$4(AF) = 3(FE) \rightarrow \frac{AF}{FE} = \frac{3}{4}$$

ΔABC : $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, entonces por el teorema de Tales se tiene que:

$$\frac{FC}{AF} = \frac{2}{3}$$

Luego :

$$FC = CE$$

ΔDFE : $\overline{GC} \parallel \overline{DF}$ y $FC = CE$, entonces por el teorema de los puntos medios se tiene

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: C

PROBLEMA 05: En el triángulo rectángulo la mediana relativa a un cateto de longitud b se interseca perpendicularmente con la mediana relativa a la hipotenusa. Entonces la longitud del otro cateto es:

A) $\frac{b}{2}$

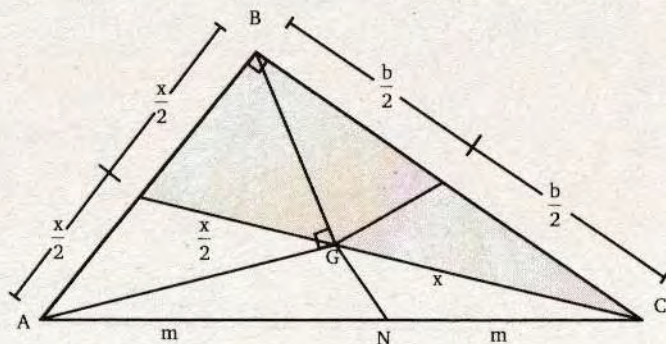
B) $\frac{b}{3}$

C) $\frac{b}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{b}{4}(\sqrt{5} + 1)$

E) $\frac{b}{2}\sqrt{2}$

Resolución:



Piden

$$AB = x$$

Datos

$$BC = b \text{ y } \overline{AM} \perp \overline{BN}$$

($\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, medianas)

$$\triangle AGB: GL = \frac{x}{2}$$

G : baricentro del $\triangle ABC$

$$\rightarrow GC = x$$

$\triangle LBC$ (teorema de Pitágoras)

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + b^2$$

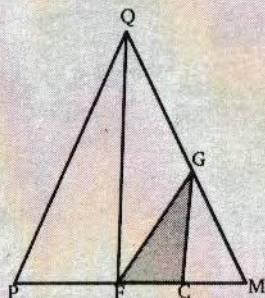
$$\therefore x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: E

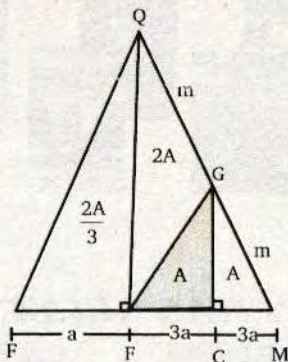
PROBLEMA 06:

En la figura mostrada $\frac{FP}{FM} = \frac{1}{6}$, $\overline{CG} \parallel \overline{QE}$. G es el punto medio de MQ y el área de la región triangular PQM es 100 m^2 . Halle el área de la región sombreada.

- A) 15
- B) $\frac{115}{7}$
- C) $\frac{150}{7}$
- D) $\frac{230}{6}$
- E) $\frac{300}{7}$



Resolución:



Piden

$$A_{\triangle FGC} =$$

$$A_{\triangle PQM} = 100 \text{ m}^2$$

Por relación de áreas:

$$A_{\triangle PQM} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore A = \frac{150}{7} \text{ m}^2$$

Rpta.: C

LIBROS



RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS



*El que ama la instrucción
ama la sabiduría. Prov. 12,1*

PEDIDOS: 528 - 1921 / 423 - 8072

Aritmética (15 folletos)
 Álgebra (15 folletos)
 Geometría (14 folletos)
 Trigonometría (17 folletos)
 Raz. Matemático (18 folletos)
 Física (16 folletos)
 Química (16 folletos)



- ✓ 140 páginas
- ✓ Marco teórico completo.
- ✓ 100 problemas resueltos
- ✓ 100 problemas propuestos con claves.
- Básico - Intermedio - Avanzado
- ✓ Exámenes de admisión resueltos.

Nº	TEMAS
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación y Congruencia)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza de Triángulos
6	Relaciones Métricas
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350
992 - 796104

 / **fondoeditorialrodo**
editorialrodo@gmail.com